957

von Halder

N. 2697.

Auszug

aus des

Abts J. F. Häseler

Anfangsgründen

der

Arithmetik, Algebra, Geometrie und Trigonometrie

zum eignen Unterricht.

Zum Gebrauch der niedern Klassen
der
Amelunxbornschen Klosterschule
in Holzminden.

Mit Kupfern.

EIGENTHUM DER STADT
AUGSBURG

LEMGO,
im Verlage der Meyerschen Buchhandlung, 1781.

Sr. Hochgebohrnen Excellenz

dem

Herrn Geheimte Rath

F. von Flögen

seinem gnädigen Herrn und verehrungs-
würdigen Gönner

widmet dieses Buch

ehrerbietigst

der Verfasser

J. F. Häseler.

Auszug aus des Abts J. F. Häseler Anfangsgründen der Mathematik zum eigenen Unterricht.

Die Arithmetik.

Das erste Kapitel.

Die ganze Zahl und ihre Zählung oder die Numeration.

§. 1.

Jedermann weis es, auch noch ziemlich kleine Kinder, was **eins** sey, und kann es sich wenigstens sinnlich vorstellen; wir haben dahero nicht nöthig, uns bey der Erklärung hievon aufzuhalten.

§. 2. Wenn man mehr Dinge als **eins** hat, die aber alle von **einerley** Art sind, so kann man sie zusammen zählen, oder fragen und ein Wort

dafür suchen, wie viel es sind? Ich kann z. E. die Finger an meiner Hand, eine Anzahl Aepfel, eine Anzahl Stücken Geld u. s. w. zusammen zählen, denn das sind Dinge von einerley Art. Aber eine Anzahl Früchte und eine Anzahl Thiere lassen sich nicht zusammen zählen, weil sie nicht von einerley Art sind, ich müste sie denn unter dem allgemeinen Namen eines **Dinges** betrachten, da gienge es an, daß ich sie zusammen zählen könnte.

§. 3. Man zählet auch wol, oder kann wenigstens zählen, ohne eben an besondere Dinge zu gedenken, sondern stellet sich **allgemein** nur Dinge vor. Von undenklichen Zeiten her zählet man von **eins bis zehne.** Vermuthlich hat die Gelegenheit dazu gegeben, daß wir **zehn** Finger an den Händen haben, und an denen hat man wol anfangs die Dinge abgezählet. Eins, Zwey, Drey, Vier, Fünf, Sechs, Sieben, Acht, Neun, Zehn.

§. 4. Als man nachhero, (welches aber gewiß weit später erfunden ist) durch willkürliche Zeichen seine Gedanken ausdrückte, erfand man auch Zeichen für das Zählen, oder für die Zahlen. Wie die ersten mögen gewesen seyn, darauf wollen wir uns nicht einlassen. Die wir jetzt gebrauchen, sind Eins, Zwey, Drey, Vier, Fünf, Sechs,

1 2 3 4 5 6

Sieben, Acht, Neun.

7 8 9

Und nun noch ein Zeichen, das **nichts** bedeutet, und welches aussiehet als ein lateinisch o und **Null** heißet. Wir werden bald sehen, wozu das gut war.

§. 5. Man nennet alle die Zahlen und ihre Zeichen, welche man bis neune zählet, Einer. So sind z. E. sechs, sechs Einer oder Einheiten, und acht, acht Einer u. s. w.

§. 6. Wenn man nun zehn solcher Einheiten zusammen hat, so heißet das ein Zehner; so ist eins bis zehn zusammen ein Zehner. Nun zählete man wieder von eins an, oder zehn und eins, zehn und zwey, bis man wieder zehn Einer hatte, das hieß denn zwanzig. Noch zehn Einer dazu hieß dreyßig, und so fuhr man fort zu zählen, bis man zehn solcher Zehner hatte, wovon man jeden Zehner mit seinem eigenen Namen benennte, und zehn solcher Zehner zusammen hießen hundert oder ein Hunderter. Wenn man auf die Art fortzählte und zehn solcher Hunderter hatte, so hieß das ein Tausender. Zehn Eintausend hießen ein Zehntausender. Zehn Zehntausender hießen ein Hunderttausender, und zehn Hunderttausender hießen eine Million oder ein Millionter, und so zählet man noch weiter bis Billion, Trillion, und bis ins Unendliche.

NB. Jeder Lehrer wird dieses mündlich ganz leicht weiter ausführen.

§. 7. Nun kam es noch darauf an, wie man diese Zahlen alle schriebe. Man bemerke erst hier, die verschiedenen Absätze von Einern, Zehnern, Hunderten u. s. w. wurden Ordnungen genennet, und nun folgte aus der Art zu zählen ein Gesetz, welches folgendes ist:

Zehn Einheiten einer niedrigern Ordnung machen eine Einheit der nächst höhern aus.

So machen zehn Einer einen Zehner, zehn Zehner einen Hunderter, zehn Hunderter einen Tausender u. s. w. aus. Und hiernach hatte man sich bey der Erfindung die Zahlen zu schreiben gerichtet. Nemlich man hatte von der rechten Hand angefangen und den ersten Platz die Stelle der Einer, den zweyten die Stelle der Zehner, den dritten die Stelle der Hunderter, den vierten die Stelle der Tausender u. s. w. genennet, daß also jeder Platz um zehnmal mehr wehrt war als der vorhergehende, wenn auch bloße 1 darinn standen. Wenn man nun eine Größe in Zahlen hatte, so setzte man jede Art von Einern in den Platz, worinn sie gehörte. Hatte man nichts vor den Platz, so kam darinn eine Null, denn man muste doch die Stelle des Platzes ausfüllen, weil man sonst nicht die Plätze hätte zählen können.

§. 8. Einige Exempel werden dieses erläutern. Kann man Zahlen gehörig schreiben, so kann man sie auch aussprechen; kann man sie gehörig aussprechen und hat sich genug geübt, so wird man sie auch schreiben können. Bis 9 lässet sich leicht schreiben und aussprechen. Nun sollte man zehn schreiben. Wenn man sich erinnert, daß **zehn Einheiten einer niedrigern Ordnung eine Einheit der nächst höhern** ausmachen, so war das leicht. Hier waren zehn Einer, also eine Einheit in den Platz der Ordnung der Zehner,

und

und in den Platz der Einer also nichts, und um das anzuzeigen, eine Null, es stund also 10.

Sechs und funfzig wurde dahero also geschrieben 56, weil fünf Einheiten in den Platz der Zehner und sechs in den Platz der Einer gehörten.

Fünfhundert sechs und zwanzig also 526. Denn es gehörten fünf Einer in den Platz der Hunderter, zwey in den Platz der Zehner und sechs in den Platz der Einer.

Vierrausend, sechshundert und zwanzig also 4620 u. s. w.

§. 9. Es wird demjenigen, der Zahlen schreiben kann, auch dahero leicht seyn, geschriebene Zahlen, die er findet, auszusprechen, sie mögen so groß seyn, wie sie wollen. Man bemerke dabey, daß man erst die Zahlen, welche man aussprechen will, abtheilen muß. Man zählet von der rechten nach der linken Hand, Klasse der Einer, Zehner, Hunderter, Tausender, Zehntausender, Hunderttausender. Hier sind sechs Klassen, die wollen wir eine Abtheilung und zwar die erste nennen, hier macht man ein Comma. Sind noch mehr Zahlen, so theile man immer sechs und sechs Zahlen zu einer Abtheilung ab. Die ersten sechs Zahlen ist die Abtheilung der Zahlen bis Hunderttausend; was in der zweyten Klasse stehet, sind Millionen. Man zählet denn weiter, Klassen der Einheiten von Millionen, zehn Millionen, hundert Millionen, tausend Millionen, zehntausend Millionen,

hunderttausend Millionen. Nun wieder ein Comma, und über die Klasse der Millionen schreibt man m. Nun kommt die Klasse der Billionen, die auf eben die Art gezählet wird; man schreibt darüber b. Nun die Klasse der Trillionen, worüber man t schreibet. Denn die Klasse der Quadrillionen, worüber man q schreiben kann u. s. w.

§. 10. Alles dieses gründet sich auf das allgemein angenommene Gesetz, das wir §. 7. angeführet haben. Man siehet auch hieraus, daß das Zehnfache der größesten Größe von jeder Klasse eine Einheit der folgenden höhern Klasse ausmache. So sind zehnmal Hunderttausend eine Million; zehnmal Hunderttausend Millionen eine Billion; zehnmal hunderttausend Billionen eine Trillion u. s. w.

§. 11. Wenn man nun geschriebene Zahlen hat und sie aussprechen will, so spreche man die Klassen in den verschiedenen Abtheilungen aus, wo sich Zahlen befinden, und wo sich null befindet, spricht man nichts aus, oder übergehet die Klasse. Dieses ist sehr leicht und natürlich.

§. 12. Jetzt mögen einige Exempel dieses erläutern. Es soll ausgesprochen werden 6824. Wenn man von der rechten Hand an bis zu Ende zählet, so ist die letzte Zahl in der Klasse der Tausender, und wenn man von da anfinge, würde man sagen müssen

Sechstausend, Achthundert, zwanzig und viere.

Eben

Eben so 580042 würde nach vorhergehendem §. 11. seyn
Fünfhundert tausend, Achtzigtausend, vierzig und zwey.

m
Und 68,904321 würde seyn
Sechzig und acht Millionen, neunmal Hunderttausend, Viertausend, Dreyhundert, zwanzig und eins.

Bey folgenden Exempeln mag die Jugend im Anfange geübt werden:

36	110	999	1000	1111
50	111	988	1001	1770
99	190	976	1010	5007
100	198	991	1100	9990
101	522	908	1011	9999

10000	100000	32904658706
10001	870907	84000100970
10010	604020	91090004000
10100	908049	90009000090
11010	910907	98765432108
11111	977099	100000100001 u. s. w.

§. 13. Auch große Zahlen zu schreiben muß uns nun nicht schwer seyn. Nur muß man von den kleinsten darunter oder von den Einern den Anfang machen. Anfänger können, um sich nicht zu irren, die Ordnungen und Abtheilungen mit Punkten bezeichnen, und denn schreibt man in jede Ordnung und Abtheilung, was darinn gehöret.

Z. E.

z. E. man sollte ein Hunderttausend, Sechstausend und fünfe schreiben. Man siehet gleich, weil hier nur Hunderttausend sind, diese Zahl gehöret in die erste Abtheilung, also

1 . 6 . . 5

Die Plätze wo die Punkte stehen, fülle man mit Nullen aus; es stünde denn also

106005

Man schreibe vier und dreyßig Millionen, zweymal Hunderttausend, Sechzigtausend und vier und zwanzig

m

34,260024

Jeder Lehrer mag hiezu häufige Exempel geben. Dieser Auszug ist nur eine Anweisung, wie und wie viel man jungen Leuten von 12 bis 14 Jahren hievon sagen mag.

§. 14. Man bezeichnete jetzt Größen mit Zahlen. Man hätte auch andere Zeichen dazu nehmen können. Ja man kann sich auch leicht vorstellen, daß man, ohne sich vors erste darum zu bekümmern, wie groß oder klein eine Größe sey, sie durch ein ganz allgemeines Zeichen hätte ausdrücken können. So könnte man sagen, a soll eine Größe bedeuten, b soll eine Größe bedeuten, aber eine andere als a, c eine andere als beyde u. s. w. Ich will aber noch nicht bestimmen, was jedes seyn soll, ich will damit rechnen, wenn es sich thun lässet. Das ist ein sehr einfacher und willkürlicher Satz. Man hat aber wirklich so verfahren, und auf die Art eine allgemeine Rechnung erfunden.

Denn

Denn das ist richtig, wenn ich mit solchen Größen rechnen kann, die ich nicht bestimmt, sondern nur als Größen betrachte, so muß das, was ich erweisen kann, was von ihnen wahr ist, von allen möglichen Größen und Zahlen wahr seyn, denn ich kann durch diese allgemeine Größen mir alle mögliche Zahlen und Größen vorstellen. So kann z. E. die a fünfe, zehn, hundert, tausend und was ich will bedeuten. Die b ingleichen was ich will u. s. w. Man behalte vors erste diesen einfachen Grundsatz.

§. 15. Man wird es leicht glauben, daß unter diesen allgemeinen Größen, wenn man auf die Art rechnen will, bekannte und unbekannte seyn werden. Die bekannten pflegt man mit den ersten Buchstaben des Alphabets a, b, c, auszudrücken. Die unbekannten mit den letztern Buchstaben x, y oder z.

Das zweyte Kapitel.

Von der Addition in ganzen Zahlen und Buchstaben.

§. 16. Gegebene Zahlen zu schreiben und auszusprechen oder das Numeriren ist bisher gezeiget. Werden aber mehrere Zahlen gegeben, und man soll sagen, wie viel selbige insgesamt in

einer

einer Zahl ausmachen, so gehöret dazu die Wissenschaft, welche das Addiren genennet wird. Addiren heißet also eine Zahl zu finden, die denen gegebenen Zahlen zusammen genommen gleich ist.

§. 17. In der Rechenkunst sowol als überhaupt in der ganzen Mathematik ist ein Zeichen erwählet, wodurch man anzeiget, daß etwas zu einer Sache soll gezählet werden, es ist +, welches durch plus ausgedrückt wird. Sollte man z. E. 4, 3 addiren, so würde solches also angezeiget 4 + 3 und ausgesprochen 4 plus 3.

§. 18. Die wirkliche Addirung solcher Zahlen, davon keine über 10, ist sehr leicht und bereits §. 6. gezeiget. Ein Ungeübter könnte nur an den Fingern zählen, z. E. 4 und 3 ist 7 u. s. w. Wären aber größere Zahlen gegeben, welche addiret werden sollen, so verfährt man folgendergestalt:

Man schreibt die gegebenen Zahlen alle unter einander, und zwar, weil nach §. 2. nur Dinge von einerley Art zusammen gezählet werden können, Einheiten unter Einheiten, Zehner unter Zehner, Hunderter unter Hunderter u. s. w., überhaupt solche Zahlen unter einander, die zu einer Klasse gehören, und macht einen Strich. Alsdenn fängt man bey den Einern an, und zählet sie zusammen.

Betragen selbige sämtlich nicht über 9, so setzet man sie unter die Reihe der Einer. Sind es mehr als 9, z. E. eben 10, so setzet

man

man eine o dahin, weil alsdenn alle die Einer einen Zehner ausmachen. Sind es mehr als 10, z. E. 14 oder 23 u. s. w. so siehet man zu, wie viel Einer darinn sind, und setzet solche unter die Reihe der Einer unter den Strich, und zählet das andre mit zu der Klasse der Zehner. Z. E. man erhielte 18 Einer, so setzte man 8 unter die Einer und 1 zählte man zu der Klasse der Zehner.

Mit der Klasse der Zehner, wozu, wie jetzt gesagt, das, was in der Klasse der Einer von Zehnern steckte, gezählet wird, verfährt man eben so. Z. E. man bekäme im Aufzählen der Zehner 42, so setzet man die 2 unter die Zehner und 4 würde zu der folgenden Klasse der Hunderter gezählet.

Auf gleiche Art verfährt man mit der Klasse der Hunderter, Tausender u. s. w. Hat man endlich keine Klasse mehr, so schreibt man ganz hin, was man aus der letzten Klasse heraus gezählet hat.

Der Grund dieses Verfahrens ist §. 7. angezeiget, nemlich, daß zehn Einheiten einer niedrigern Ordnung eine Einheit der nächst höhern ausmachen.

§. 19. Folgendes Exempel wird die gegebene Regeln sattsam erläutern. Man addire 7, 9, 11, 20. Dieses würde nach gegebener Vorschrift also aufgesetzt:

7
9
11
20
1

47

Zuerst zählet man die Einer als 7, 9, 1 zusammen und bekommt 17, welche einen Zehner und 7 Einer geben. Die 7 Einer werden unter den Strich unter die Einer, und der eine Zehner wird durchstrichen über den Strich unter die Zehner gesetzet, um sie im Aufzählen demnächst nicht zu vergessen. Man zählet ferner die Zahlen in der Klasse der Zehner, welche 4 geben, und setzet solche unter den Strich unter die Zehner; und nun wären die gegebenen Zahlen addiret. Eben so auch folgendes Exempel:

321
401
621
16
9
1001
1

2369

§. 20. Sowol die Zahlen, welche zu addiren gegeben werden, als auch die Zahl, welche man durch die Addition erhält, haben ihren besondern Namen. Erstere werden die zu summirenden, und letztere die Summa oder Aggregat genennet; so wären im erstern Exempel 7, 9, 11, 20 die zu summirenden, und 47 die Summa oder Aggregat.

Es

Es könnte auch jetzt angeführtes Exempel also ausgedrückt werden 7 + 9 + 11 + 20 = 47 oder 7 plus 9 plus 11 plus 20 ist gleich 47. Das zwischen den zu summirenden Größen und der Summa gesetzte Zeichen = wird das Zeichen der Gleichheit genennet, und zeiget, daß eine Größe oder Zahl der andern gleich. Es wird mehrentheils durch das Wort equal ausgedrückt.

§. 21. Mehrere Exempel der Addition auf jetzige Art zergliedert anzuführen, würde unnöthiger Weise den Platz rauben, und kann sie jeder Lehrer selbst geben, auch berufen wir uns auf das größere Werk, wovon dieses ein Auszug ist.

§. 22. Eine wiederholte Aufzählung der gegebenen Zahlen, da man etwa von unten herauf und wieder von oben herunter zählet, giebt die sicherste Ueberzeugung, daß man richtig gerechnet. Die verschiedenen Arten, wodurch man sonst diese Versicherung zu erhalten sucht, sind theils unsicher und weitläuftig, theils setzen sie Dinge zum voraus, die noch nicht erkläret sind.

§. 23. Die Erwählung der Zahlzeichen war willkührlich, und im §. 14 ist bereits angezeiget, daß man an deren Statt auch Buchstaben erwählen könnte. Da dieses angehet, so müssen mit den Buchstaben auch alle Veränderungen, welche bey Zahlen angehen, vorgenommen werden können. Man kann also auch Buchstaben addiren. Ehe wir aber das Verfahren zeigen, müssen wir erst folgendes bemerken.

§. 24. Alle Größen, sie mögen mit Zahlen oder Buchstaben bezeichnet seyn, werden entweder als positive (bejahende) oder als negative (verneinende) Größen betrachtet. Beyde Arten sind wirkliche und nur einander entgegengesetzte Größen. Verschiedene Handlungen, verschiedene Umstände des menschlichen Lebens bilden selbige ziemlich deutlich ab. So wäre z. E. Vermögen eine positive und Schuld eine dieser entgegengesetzte oder negative Größe. Das Zeichen, womit eine positive Größe angezeiget wird, ist das §. 17. bereits erklärte Zeichen der Addition (+) oder plus. Es werden dahero wegen dieses Zeichens zuweilen die positive Größen auch Plusgrößen genennet.

Der negativen Größen Zeichen ist (—), welches minus ausgesprochen wird. Von dieser Bezeichnung werden auch wol manchmal die negativen Größen Minusgrößen genennet.

§. 25. Es ist keinem Zweifel ausgesetzt, daß sowohl gleichnamigte Plus- als gleichnamigte Minusgrößen addiret werden können. Z. E. 20 Thaler Einnahme und noch 5 Thaler Einnahme kann man eben so wie 15 Thaler Ausgabe und noch 3 Thaler Ausgabe addiren. Man wird auch überzeuget seyn, daß die Summa einiger gleichnamigter Plusgrößen wieder eine Plusgröße, so wie die Summa einiger gleichnamigter Minusgrößen wieder eine Minusgröße sey. Aber auch Plus- und Minusgrößen, wenn sie gleichnamigt sind, lassen sich addiren. Da minus das

Ent-

Entgegengesetzte von plus ist, so wird die Addition entgegengesetzter gleichnamigter Größen darinn bestehen, daß man die kleinere Größe von der größern abnehme, und alsdenn bekommt das, was übrig bleibt, das Zeichen der größesten Größe. Ist also die größeste Größe eine **Plusgröße**, so bekommt das Ueberbliebene das Zeichen +. Ist aber die größeste Größe eine **Minusgröße**, so bekommt das Ueberbliebene das Zeichen —. Z. E. ich hätte 6 Thaler Einnahme und 4 Thaler Ausgabe zu berechnen; ich wollte wissen, wie viel ich annoch vorräthig, so hätte ich + 6 Thaler und — 4 Thaler zu addiren, und stünde solches also:

\+ 6 Thaler
— 4 Thaler

\+ 2 Thaler

Nehme ich die Ausgabe oder — 4 Thaler von der Einnahme oder + 6 Thaler ab, so bleiben 2 Thaler, welche, da die + 6 Thaler die größeste Größe, auch wieder eine **Plusgröße** werden. Es konnte auch nicht anders kommen, denn ich behielt wirklich 2 Thaler vorräthig.

§. 26. Wir wollen von jeder Art ein Exempel geben und mit der Addition **positiver** Größen, oder vor welchen das + Zeichen stehet, den Anfang machen. Z. E. man addire zu + 7a + 4b + 8c noch + 3a + b + 9c, das stünde also:

\+ 7a + 4b + 8c
\+ 3a + b + 9c

\+ 10a + 5b + 17c

In gegenwärtigem Exempel finden wir, daß gleichnamigte Buchstaben unter einander gesetzt sind, dieses muste nach §. 2. geschehen. Wir sehen ferner, daß, da alle in gegenwärtigem Exempel gegebene Größen positive Größen sind, selbige sämtlich mit dem Zeichen + bezeichnet sind. Gleich zu Anfange, wie hier die Größen mit a, hätte solches unterbleiben können, weil die Mathematiker gewöhnlich, wenn die erste in einer Reihe von Größen positiv ist, solches weglassen. Wir bemerken noch, daß vor einigen Größen Zahlen und vor einigen keine Zahlen stehen. Diese Zahlen werden Coefficienten genannt, und zeigen an, wie vielmal die Größe genommen ist. Stehet keine Zahl vor selbigen, so bedeutet es, daß die Größe nur einmal genommen, und ist alsdenn der Coefficient solcher Größe = 1, ohnerachtet selbige nicht davor gesetzet. Was übrigens die Addition der gegebenen Größen anbetrift, so addiret man nur die Coefficienten oder die vor denen Buchstaben befindliche Zahlen zusammen, und ist es willkührlich, ob man vorne bey a oder hinten bey c anfängt. So könnte man in gegenwärtigem Exempel die Coefficienten von c zählen, als +8 und +9 machen +17c; ferner die Coefficienten von b also +4 +1 geben 5b, und die Coefficienten von a als +3 +7 sind +10a. Die Summa sämtlicher Größen wird unter den Strich, und zwar gleichnamigte Größen unter einander gesetzet, wie aus beygesetztem Exempel mit mehrern zu ersehen.

§. 27. Auf gleiche Weise verfähret man auch, wenn die zu summirenden Größen bloß minus oder negative Größen sind, außer daß die Summa das — Zeichen bekommt. Z. E. man addire

$$\begin{array}{r} -4a-3b-4c \\ -3a-2b-c \\ -5a-b-8c \\ \hline -6a-10b-7c \\ \hline -18a-16b-20c \end{array}$$

die Summa ist hier $= -18a-16b-20c$.

§. 28. Bestehen die zu summirenden Größen aus entgegengesetzten Größen, so verfähret man wie am Ende des §. 25. bereits gelehret, und folgendes Exempel deutlich zeiget. Z. E. man addire

$$\begin{array}{r} 7a-3b+5x \\ -6a+2b-7x \\ 5a+b-8x \\ \hline 6a \quad -10x \end{array}$$

Die Größen, welche hier durch x angezeiget worden, sind einander entgegen gesetzt, man muß dahero nach §. 25. die Plus- und Minusgrößen jede besonders addiren, und alsdenn die kleinern von der größern Größe abnehmen. Die Plusgrößen von x sind hier $= 5x$ und die Minusgrößen $= -15x$. Von diesen $+5x$ abgenommen bleiben $-10x$, welches die Summa dieser addirten entgegen gesetzten Größen ist und unter den Strich gesetzet wird.

Die b Größen sind wieder entgegen gesetzte Größen, wovon die Minusgrößen $= -3b$ und die Plusgrößen $= 2b + b = 3b$. Hier ist die Plusgröße so groß wie die Minusgröße, sie heben sich also einander auf und werden zu nichts.

Die Plusgrößen von a sind $= 12a$ und die Minusgrößen $= -6a$, es ist also ihre Summa $= 12a - 6a = 6a$.

§. 29. Sind aber die zu summirenden Größen nicht gleichnamigt, so setzet man selbige ohnverändert mit ihren bey sich habenden Zeichen hin. Z. E. man soll addiren $4a - 3b + c$; solches wird also gesetzet:

$$4a - 3b + c$$

Auf gleiche Weise verfähret man, wenn unter denen zu summirenden Größen sich eine oder etliche befinden, zu welchen keine gleichnamigte vorhanden. Z. E. man addire

$$\begin{array}{r} 4a - 3b + 4c + f \\ 8a + 2b - 3c \\ -6a - 4b - 2c + g \\ \hline 6a - 5b - c + f + g \end{array}$$

Hier sind die gleichnamigten Größen nach der gegebenen Vorschrift addiret, weil aber weder zu $+f$ noch $+g$ gleichnamigte vorhanden, so sind solche ohnverändert mit ihren Zeichen der Summa beygefüget.

§. 30. Was bisher von der Addition sowohl der ganzen Zahlen als Buchstaben gesagt, ist unserm Vorhaben gemäß. Mit folgenden zween

Grund-

Grundsätzen, welche zwar sehr leicht zu begreifen, deren Befolgung aber höchst nothwendig und wichtig ist, wollen wir diese Lehre beschließen.

Der erste Grundsatz. Sind zwey Größen einander gleich, und man addiret zu beyden gleiches, so müssen auch beyder Summen einander gleich seyn.

Z. E. die gegebene Größen wären 8 und 8, beyde sind also gleich groß; zu jeder soll 4 addiret werden. Da nun zu der einen 8 so viel wie zu der andern 8 addiret wird, so muß die Summa der erstern $8+4$ so groß seyn als der andern $8+4$, und wirklich addiret 12 so groß seyn wie 12, oder

$$\begin{array}{r} 8 = 8 \\ 4 = 4 \\ \hline 8+4 = 8+4 \\ \hline 12 = 12 \end{array}$$

Was hier von Zahlen erwiesen, muß auch von Buchstaben wahr seyn. Wenn also

$$\begin{array}{r} a = a \\ b = b \\ \hline \end{array}$$

so folget, daß $a+b=a+b$

oder wenn

$$\begin{array}{r} a = 8 \\ b = 4 \\ \hline \end{array}$$

so folget, daß $a+b=8+4=12$

Der zweyte Grundsatz. Sind aber zwey Größen ungleich, und man addiret zu der großen

so viel wie zu der kleinen, so ist die Summa der erstern größer als der andern. Z. E.

12 ist größer als 9
9 = 9
12 + 9 ist größer als 9 + 9
21 ist größer als 18

oder in Buchstaben a ist größer als b
c = c
a + c ist größer als b + c

In der Mathematik ist auch ein Zeichen erwählet, wodurch angezeiget wird, daß eine Größe oder Zahl größer oder kleiner als die andere sey. Es ist folgendes > und wird zwischen zwo Größen gesetzet. Die Größe, gegen welche die Oefnung hingekehret, ist die größeste, und gegen welche die Spitze gekehret, die kleinste. letzteres Exempel hätte man dahero auch also bezeichnen können

12 > 9
9 = 9
12 + 9 > 9 + 9
21 > 18

Wenn man aber setzte 12 < 15
9 = 9
12 + 9 < 15 + 9

so wäre die Summa der erstern Größe kleiner als die Summa der andern.

§. 31. Wird zu der größern Größe noch mehr addiret wie zu der kleinern, so muß die Sum-

Summa der erstern um so mehr die Summa der andern übertreffen. Z. E.

$$\begin{array}{r} 16 > 7 \\ 12 > 9 \\ \hline 16+12 > 9+7 \\ \hline 28 > 16 \end{array}$$

§. 32. Die Vermehrung einer Größe kann nicht nur durch die bisher erklärte Addition, sondern auch noch auf eine andere Art, welche die **Multiplication** genennet wird, geschehen. Nach der einmal eingeführten Ordnung aber setzen wir deren Erklärung noch zurück, und zeigen, wie eine Größe verringert oder verkleinert werde.

Das dritte Kapitel.

Von der Subtraction in ganzen Zahlen und Buchstaben.

§. 33. Die Subtractio lehret, von einer gegebenen Größe eine andre ihr gleichnamigte wegnehmen, welches man auch abziehen nennet.

§. 34. Sowohl die gegebene Größen, deren eine von der andern genommen werden soll, als auch die Größe, welche man hiedurch bekommt, haben ihre besondre Namen.

Minuendus, wird die Größe, wovon etwas genommen werden soll;

Subtrahendus, was von ersterer genommen werden soll;

Differenz oder Rest wird das, was nach der Subtraction übrig bleibet, genennet.

§. 35. Die erstern beyden Benennungen bedürfen keiner Erklärung. Die letztere aber und zwar Differenz würde vielleicht nicht allen gleich deutlich seyn. Differenz (Unterscheid) zeiget an, um wie viel der Minuendus und der Subtrahendus in der Größe unterschieden sind; z. E. ich soll von 8 die 6 nehmen, so wäre 8 der Minuendus, und 6 der Subtrahendus, nehme ich die 6 von 8 weg, so behalte 2 übrig, welche Differenz heißet, und anzeiget, daß 8 um 2 größer als 6.

§. 36. Das Zeichen, welches der Subtraction eigen, oder wodurch man anzeiget, daß eine Größe von der andern abgezogen werden soll, ist —, welches bereits §. 24. erkläret. Man setzet solches zwischen die gegebene Größen, welche von einander subtrahiret werden sollen. Z. E. von 9 soll 4 genommen werden, so wird solches angezeiget 9 — 4.

§. 37. Bey der wirklichen Subtraction setzet man die gegebene Größen unter einander, und zwar den Minuendus über den Subtrahendus, und zwar nach §. 2. Einheiten unter Einheiten u. s. w., macht alsdenn einen Strich darunter, alsdann ziehet man Einer von Einer, Zehner

ner von Zehner u. s. w. ab, und setzet den Rest oder Differenz unter den Strich. Z. E. ich soll von 7, 4 abziehen, stünde also:

7 Minuendus
4 Subtrahendus
3 Differenz.

§. 38. Bey der Subtraction in Zahlen sind entweder

1) alle Zahlen des **Minuendi** größer als des **Subtrahendi**, oder

2) einige Zahlen des **Minuendi** sind größer als des **Subtrahendi**, ohnerachtet ersterer wirklich größer als letzterer, oder es befinden sich auch wohl

3) zwischen den Zahlen des **Minuendi** einzelne Nullen, oder

4) sowohl zwischen den Zahlen des **Minuendi** als **Subtrahendi** befinden sich einzelne oder viele auf einander folgende Nullen, oder

5) der **Subtrahendus** ist größer als der **Minuendus**. Bey jedem jetzt gemeldeter Vorfälle wollen wir das Verfahren zeigen.

§. 39. Erster Vorfall. Der **Minuendus** sey in allen Zahlen größer als der **Subtrahendus**.

Z. E. von 4987 soll 625 abgezogen werden. Man setzet also nach §. 37.

4987 Minuendus
625 Subtrahendus
4362 Differenz

Bey

Bey der niedrigsten Klasse fängt man an und ziehet also 5 Einer von 7 Einer ab, bleiben 2 Einer, welche unter den Strich gesetzet werden. Hierauf 2 Zehner von 8 Zehner bleiben 6 Zehner, ferner 6 Hunderter von 9 Hunderter bleiben 3 Hunderter. In der Klasse der Tausender des Minuendi sind 4, wovon aber keine gleichnamigte im Subtrahendo vorhanden, es wird also die 4 ohnverändert unter den Strich gesetzt.

Die Differenz beträgt also 4362 oder durch Zeichen ausgedrückt

4987 — 625 = 4362.

§. 40. Der zweyte Fall. Im Minuendo sind einige Zahlen größer als im Subtrahendo, obgleich jener größer als dieser. Z. E. es wäre

10 10

7.4 3.6 7 Minuendus

4 5 7 8 4 Subtrahendus

29083 Differenz

Man ziehet 4 Einer von 7 Einer ab, bleiben 3 Einer. Von 6 Zehner sollen 8 Zehner abgezogen werden, solches gehet nicht. Man muß also von der nächst folgenden Klasse des Minuendi oder der 3 Hunderter eine Einheit dazu nehmen (welches man Borgen nennet) und durch einen bey solcher Zahl gemachten (.) angezeiget wird. Diese geborgte Einheit oder Einhunderter enthält nach §. 7. zehn Zehner in sich; solche setzet man, wie hier, über die 6, addiret beydes zusammen, giebt

16 Zehner, wovon die 8 Zehner des Subtrahendi abgezogen, zur Differenz 8 bleibt. In der Klasse der Hunderter des Minuendi 3, welche aber durch die verborgte eins zur 2 geworden, die im Subtrahendo befindliche 2 abgezogen, giebt zur Differenz 0.

Ferner 5 tausend von 4 tausend abgezogen, gehet nicht, es wird also wieder bey der nächst folgenden Klasse des Minuendi hier bey 7 eins geborget, geben Zehnhundert, solche zu 4 hundert addiret, sind = 14, hievon 5 abgezogen, ist die Differenz 9.

Endlich da die letzte Klasse im Minuendo oder 7 eins weniger, also 6 geworden, so ziehet man von 6 die 4 ab, bleiben 2, mithin ist von 74367 abgezogen 45284, die Differenz 29083 oder 74367 — 45284 = 29083.

§. 41. Der dritte Fall. Zwischen den Zahlen des Minuendi befinden sich einzelne Nullen. Z. E. es wäre

9
1Ø1Ø 1Ø 1Ø
8,Ø0 7.Ø 4.7 Minuendus
4 7 9 3 8 Subtrahendus
7 9 6 4 1 0 9 Differenz.

In der Klasse der Einer ist der Subtrahendus größer als der Minuendus. Es wird also bey den Zehnern eins geborget, wodurch der Minuendus 17 Einer bekommt, hievon 8 abgezogen, bleiben 9 Einer. Die Klasse der Zehner

hebt

hebt sich, weil von der obern 4 eins geborget, giebt also 0. In der folgenden Klasse befindet sich 0, welche durch die bey 7 geborgte eins zur zehne wird, hievon 9 abgezogen, bleibet 1. Von der folgenden Klasse, in welcher nach verborgter 1 noch 6 vorhanden, 2 abgezogen, bleiben 4. Es ist nun noch im Subtrahendo 4 vorhanden. In der ihr gleichnamigten Klasse ist aber 0. Man müßte also bey der folgenden Größe eins borgen, aber auch in dieser ist 0. Es wird dahero bey der folgenden oder bey 8 eine Einheit erborget, welche in der ihr nächst niedrigern Klasse 10 Einheiten macht. Von diesen wird wieder 1 geborgt, welche auch 10 Einheiten in der nächst niedrigen giebt, hievon 4 abgezogen, bleiben 6. Endlich die beyden übrigen Größen des Minuendi, weil nichts von selbigen abzuziehen, mit den Zahlen, welche ihnen nach verborgten Einheiten eigen, also hier anstatt 0 eine 9 und anstatt 8 eine 7 unter den Strich gesetzet; es wird also

8007047 — 42938 = 7964109.

§. 42. Der vierte Fall. Im Subtrahendo sowohl wie im Minuendo sind einzelne oder viele auf einander folgende Nullen. Z. E. es sey

10
4.0780 Minuendus
3840 Subtrahendus
2740 Differenz.

Die Differenz der Einer ist hier = 0, weil in beyden nichts vorhanden. Die Differenz der

Zeh-

Zehner ist = 4. Die Differenz der Hunderter ist = 7, weil nichts von 7 die Größe ohngeändert lässet. Die folgende Klasse, in welcher im Minuendo 0, bekommt durch die bey 4 geborgte 1 zehn Einheiten, hievon 2 abgezogen, bleiben 2, und von 3, welche vor verborgter 1 = 4, 3 abgezogen, bleibt 0, welche aber nicht unter den Strich gesetzt wird, weil 0 vor einer Zahl gesetzet nichts bedeutet.

§. 43. Sind sowohl im Minuendo als Subtrahendo noch mehrere Nullen befindlich, so ist das Verfahren dem jetzt gezeigten gleich. Beygesetztes Exempel wird solches deutlich zeigen. Z. E. es wäre

9 9 9 9
10 10 10 10 10
9. 0 0 0 0 8 Minuendus
8 0 0 0 0 9 Subtrahendus

9 9 9 9 9 Differenz.

§. 44. Der fünfte Fall. Der ganze Subtrahendus sey größer wie der Minuendus; z. E.

6 Minuendus
8 Subtrahendus

— 2 Differenz.

Hier ziehet man den Minuendus von dem Subtrahendus, also hier 6 von 8 ab, und setzet vor die Differenz also 2 das Minus Zeichen, mithin — 2.

Der Grund dieses Verfahrens ist sehr deutlich. Man hätte z. E. 6 Thaler, man sollte aber

8 Thaler ausgeben, so wären die 6 Thaler, welche man besitzet, zu Tilgung dieser Ausgabe nicht hinreichend, sondern ließen eine Schuld von 2 Thaler übrig, welche durch das Minuszeichen abgebildet wird. Beobachtet man die Veränderung dieses Zeichens, so werden noch größere Exempel dieser Art aufzulösen sehr leicht seyn. Z. E.

9 8 4 7 0 0 4 6 Minuendus
7. 2. 7 5. 3 7. 0 8 Subtrahendus
10 10 10 10

— 2 9 0 6 2 6 6 2 Differenz

also 98470046 — 127532708 = 29062662.

§. 45. Bestehet der **Minuendus** sowohl wie der **Subtrahendus** aus zusammengesetzten oder auch aus Plus- und Minusgrößen, so schließet man, die Subtraction anzuzeigen, jede Größe in Klammern ( ) und setzet zwischen beyde Größen das Zeichen der Subtraction. Z. E. der Minuendus wäre = 4 + 3 — 2, und der Subtrahendus = 2 + 4 — 3, so zeigte man beyder Größen Subtraction also an

(4 + 3 — 2) — (2 + 4 — 3)

Wollte man wirklich subtrahiren, so addiret man 4 + 3 — 2 und 2 + 4 — 3, jede besonders nach §. 25. zusammen, ist 5 und 3, ziehet alsdenn 3 von 5 ab, bleiben 2. Dieses Exempel würde also aufgesetzet:

(4 + 3 — 2) — (2 + 4 — 3) = (7 — 2) — (6 — 3)
= 5 — 3 = 2

ferner

(9 — 5) — (8 + 3) = 4 — 11 = — 7.

Um

Um jetzt gezeigte Klammern findet man oftmals noch mehrere, und zwischen selbige auch Größen gezeichnet, welches wir in der Folge erklären werden.

§. 46. Wir wollen nunmehro die allgemeine Subtraction, oder die Subtraction der Größen mit Buchstaben bezeichnet, zeigen. Es ist bekannt, daß alle Größen, sie mögen mit Zahlen oder Buchstaben bezeichnet seyn, Plus- oder Minusgrößen sind. Es kann also in einem Subtractionsexempel

1) der Minuendus und Subtrahendus eine Plus- oder

2) beyde eine Minusgröße, oder

3) der Minuendus eine Plus-, und der Subtrahendus eine Minusgröße, oder

4) der Minuendus eine Minus- und der Subtrahendus eine Plusgröße seyn.

Alle jetzt erwähnte Fälle können sich sowohl bey Zahlen als Buchstaben begeben; bey der Buchstabenrechnung pflegt man selbige gemeiniglich zuerst vorzutragen.

§. 47. Sind der Minuendus und der Subtrahendus also beyde Plusgrößen, so ist entweder ersterer größer oder kleiner als der letztere. Die Entscheidung geben hievon die Coefficienten gleichnamigter Größen. (Was Coefficient sey, ist §. 26. gezeiget.) Ist alsdenn der Minuendus der größeste, so ziehet man die Coefficienten gleichnamigter Größen auf die gezeigte Art ab. Z. E.

4a + 9b + 4c Minuendus
3a + 8b + 4c Subtrahendus

a + b Differenz.

In diesem Exempel wäre die Differenz von c = o, welche aber bey Buchstaben nicht gesetzet wird. Von b wäre selbige = b, denn + 8b von + 9b giebt b; von a wäre die Differenz = a.

Ist der Minuendus aber kleiner wie der Subtrahendus, so verfährt man mit dem Coefficienten, wie bey den Zahlen §. 44. gezeiget. Z. E.

9.a Minuendus
15.a Subtrahendus

— 6a Differenz.

Dieses Verfahren erfordert keinen Beweis, weil solcher in eben angeführtem §. 44. hinlänglich gezeiget.

§. 48. Der Minuendus sowohl als Subtrahendus sind Minusgrößen, und zwar ersterer oder Minuendus sey der größeste. Z. E.

— 7a Minuendus
— 4a Subtrahendus

— 3a Differenz.

In diesem Fall ist die Differenz allemal eine Minusgröße. Der Beweis ist sehr leicht, und folgendes Beyspiel wird ihn deutlich zeigen. — 7a soll 7 Thl. Schuld, so wie — 4a die Bezahlung einer Schuld von 4 Thl. anzeigen. Verringere ich wirklich 7 Thl. Schuld um 4 Thl., so bleibt die

Schuld

Schuld nur noch 3 Thaler, welche durch —3a vorgestellet werden können.

Der **Minuendus** sey in diesem Fall aber kleiner als der **Subtrahendus**, also

—7a Minuendus
—9a Subtrahendus

+2a Differenz.

Hier muß die Differenz eine **Plusgröße** werden, und warum? Wollen wir ersteres Gleichniß beybehalten, so könnten wir hier —7a als 7 Thl. Schuld, und —9a als 9 Thaler, welche zu Tilgung dieser Schuld bestimmt, ansehen. Bezahlten wir nun wirklich 7 Thaler, so bleiben noch 2 Thaler baar übrig, welche durch 2a angezeiget werden.

§. 49. Der **Minuendus** sey eine **Plus-** und der **Subtrahendus** eine **Minusgröße.**

Hier mag der **Minuendus** der größeste oder kleinste seyn, so wird auf beyde Fälle die **Differenz** eine **Plusgröße.** Z. E. es sey

12a Minuendus
— 8a Subtrahendus

20a Differenz

oder

8a Minuendus
—12a Subtrahendus

20a Differenz.

Es ist dieses auch leicht begreiflich. Denn wenn man von einer **Plusgröße** die entgegengesetzte

oder eine Minusgröße abziehet, so heißet dieses nicht, wirklich davon eben das, sondern das entgegengesetzte abnehmen, das heißet wirklich zu addiren. Z. E. wenn man von + 8 Thl. — 12 Thl. abziehen soll, das kann man sich vorstellen, den Mangel von 12 abnehmen, also müssen das wohl 20 werden.

§. 50. Der Minuendus sey eine Minus- und der Subtrahendus eine Plusgröße.

Ist ersterer oder letzterer der größeste, so wird allemal die Differenz, welche man durch die Addition der Coefficienten hier wieder bekommt, eine Minusgröße werden. Z. E.

— 9a Minuendus oder es wäre	— 8a Minuendus
8a Subtrahend.	9a Subtrah.
— 17a Differenz	— 17a Differenz.

Bey beyden haben wir zur Differenz — 17a erhalten. Es ist eben der gleich vorher angegebene Grund, den wir von entgegengesetzten Größen anführten.

§. 51. Wollen wir also entgegengesetzte gleichnamigte Größen von einander subtrahiren, so addiren wir die Coefficienten, und setzen vor die Summa das Zeichen des Minuendi. Wir hätten aber die nemliche Differenz erhalten, wenn wir das Zeichen des Subtrahendi verkehrt, und wenn solcher plus in minus, oder wenn solcher minus in plus verändert, und alsdenn die Coefficienten nach §. 26 und 27. addiret hätten. Z. E.

— 12a

— 12a Minuendus
9a Subtrahendus

— 21a Differenz

Verändern wir aber hier das Zeichen des Subtrahendi, welches jezt plus in minus, und addiren die Coefficienten, also hier, — 12 und — 9, so erhalten wir — 21a ebenfalls, wie beygesetztes Exempel zeiget.

— 12a Minuendus
9a Subtrahendus
—

— 21a Differenz.

Dieses gehet aber sowohl bey der Subtraction entgegengesetzter, als Plus- von Plus- und Minus- von Minusgrößen an. Z. E.

— 8a Minuendus	oder	4a Minuendus
— 4a Subtrahendus		3a Subtrahendus
+		—
— 4a Differenz		a Differenz

§. 52. Hieraus ist nun die allgemeine Regel für alle mögliche Subtractionsexempel entstanden.

Die Zeichen der Größen, welche im Subtrahendo befindlich, werden in die entgegengesetzten verwandelt, und die Subtraction in die Addition verändert.

Diese Regel gilt auch, wenn im Subtrahendo solche Größen sind, davon keine gleichnamigte im Minuendo befindlich. Ist dieses, so werden solche nur mit veränderten Zeichen unter dem Strich der Differenz beygefüget.

Sind aber im Minuendo Größen, wovon keine gleichnamigte im Subtrahendo befindlich, so werden solche mit ohnveränderten Zeichen der Differenz beygefüget.

§. 53. Es wird nun nicht schwer fallen, auf alle jetzt gezeigte Fälle auch zusammen gesetzte Größen zu subtrahiren. Z. E.

$$\begin{array}{rrrrl} 4a & +9b & -16c & -4x & \text{Minuendus} \\ -3a & -7b & & -x & \text{Subtrahendus} \\ + & + & & + & \\ \hline 7a & +16b & -16c & -3x & \text{Differenz} \end{array}$$

oder es sey

$$\begin{array}{rrrrl} -24a & +3b & -4c & & \text{Minuendus} \\ -20a & +4b & -5c & -x & \text{Subtrahendus} \\ + & - & + & + & \\ \hline -4a & -b & +c & +x & \text{Differenz.} \end{array}$$

§. 54. Den Beweis, daß man bey der Subtraction sowohl in Zahlen als Buchstaben richtig verfahren, giebt die Addition. Es ist auch sehr natürlich. Denn da die Subtraction das trennet, was die Addition verbunden, so muß durch diese die erstere Größe wieder erhalten werden. Wir wissen, daß die Differenz entstand, wenn wir vom Minuendo den Subtrahendum abzogen, oder durch Zeichen Differenz = Minuendus — Subtrahendus. Addiren wir nun die Differenz zu dem Subtrahendo, so muß deren Summa den Minuendum wieder geben, also Subtrahendus + Differenz = Minuendo.

Z. E.

z. E. in Zahlen

9432 Minuendus
4309 Subtrahendus

5123 Differenz

also 4309 Subtrahendus
5123 Differenz

f

9432 Minuendus

oder $9432 - 4309 = 5123$

folglich $9432 = 5123 + 4309$

In Buchstaben $4a - 3b + 5c$ Minuendus
$-3a - 4b - c + f$ Subtrahendus
$+ \quad + \quad + \quad -$

$7a + b + 6c - f$ Differenz

also $-3a - 4b - c + f$ Subtrahendus
$7a + b + 6c - f$ Differenz

$4a - 3b + 5c$ Minuendus.

§. 55. Bestehet der Minuendus und Subtrahendus aus keinen gleichnamigten Buchstaben, so schließet man jede Größe besonders in Klammern, setzet zwischen selbige das Minuszeichen, und zeiget auf solche Art nur deren Subtraction an. z. E. der Minuendus sey $= 4a + 3b - c$, und der Subtrahendus $= -x + 4y$, so wird deren Subtraction nur angezeiget.

$(4a + 3b - c) - (-x + 4y)$

§. 56. Wir beschließen die Lehre von der Subtraction mit drey Anmerkungen, deren Wichtigkeit in der Folge erkannt werden wird.

Die erste Anmerkung. Sind zwo Größen einander gleich, und man subtrahiret von der einen so viel wie von der andern, so ist auch beyder Differenz gleich groß. Z. E.

$$\begin{array}{r} 7 = 7 \\ 6 = 6 \\ \hline 7-6 = 7-6 \\ \hline 1 = 1 \end{array}$$

Oder ohne Zeichen. 7 ist equal 7; 6 ist equal 6; folglich 7 minus 6 ist equal 7 minus 6.

In Buchstaben

$$\begin{array}{r} a = c \\ d = m \\ \hline a-d = c-m \end{array}$$

Die zwote Anmerkung. Wenn zwo Größen ungleich groß, und man subtrahiret von beyden gleich viel, so muß die Differenz der größern auch größer seyn, wie die Differenz der kleinern. Z. E.

$$\begin{array}{r} 12 > 6 \\ 4 = 4 \\ \hline 12-4 > 6-4 \\ \hline 8 > 2 \end{array}$$

oder

$$\begin{array}{r} 12 > a \\ 4 = b \\ \hline 12-4 > a-b \end{array}$$

Die

Die dritte Anmerkung. Wenn aber zwo Größen gleich groß, und man subtrahiret von der erstern mehr wie von der andern, so wird die Differenz der erstern kleiner, wie die Differenz der andern. Z. E.

$$\begin{array}{r} 19 = 19 \\ 9 > 5 \\ \hline 19-9 < 19-5 \\ \hline 10 < 14 \end{array}$$

oder

$$\begin{array}{r} 7 = a \\ 4 > b \\ \hline 7-4 < a-b \\ \hline 3 < a-b \end{array}$$

Wir beschließen hiemit die Lehre der Subtraction, und wollen die zwote Art eine Größe zu vermehren, wovon bereits §. 32. Erwehnung geschehen, zeigen.

Das vierte Kapitel.

Von der Multiplication in ganzen Zahlen und Buchstaben.

§. 57. **Multipliciren heißet eine gegebene Größe so vielmal nehmen, als es gefordert wird, oder als die Zahl, so vielmal es gefordert wird, die Einheit in sich enthält.**

hält. Also 4 mit 5 multipliciren heißet 4 so vielmal nehmen, als 5 die Einheit in sich hat, oder 5 mal nehmen. Betrachten wir dieses Verfahren genau, so finden wir, daß eben die Größe, welche 4 multipliciret mit 5 giebet, auch durch eine 5 malige Addition der 4 entstanden wäre. Bey großen Zahlen würde aber in diesem Fall der Gebrauch der Addition beschwerlich, weitläuftig und der Gefahr des Verzählens sehr unterworfen seyn. Alles dieses benimmt uns die **Multiplication.** Sie ist also eigentlich eine kurze, vortheilhafte und sichere Art, Größen, die nicht nur dem Namen, sondern auch der Größe nach sich völlig gleich, zu addiren.

§. 58. Die Multiplication gegebener Größen uns anzuzeigen, gebraucht man entweder einen Punkt (.) oder ein liegendes Kreuz ×. Eins von diesen beyden Zeichen wird zwischen 2 gegebene Größen, welche mit einander multipliciret werden sollen, gesetzet. Z. E. die Multiplication 4 mit 6 anzuzeigen, stünde entweder 4.6 oder 4×6.

Zwischen Zahlen, deren Vervielfältigung angezeiget werden soll, ist eines dieser Zeichen schlechterdings nöthig, weil man, wenn anstatt 4.6 oder 4×6, gesetzet wäre 46, verstehen könnte sechs und vierzig.

Zwischen Buchstaben, deren Vermehrung angezeiget werden soll, sind selbige aber nicht nöthig, weil ein jeder Buchstabe, welcher ohne dabey gesetztes Zeichen an einen andern gesetzet, bereits anzeiget, daß er mit jenem multipliciret sey.

§. 59.

§. 59. Die Größen, welche mit einander multipliciret werden sollen, werden zusammen genommen, Factores genennet. Außerdem aber wird die Größe, welche vermehret werden soll, der Multiplicandus, womit aber die Vermehrung geschehen soll, der Multiplicator, und die durch die Multiplication beyder genannten Größen erhaltene Größe das Product oder auch Factum genennet. Z. E. man soll 4 mit 3 multipliciren, so ist

4 Multiplicandus
3 Multiplicator
---
12 Product

oder 4 und 3 wären die Factores und 12 das Product.

§. 60. Die Multiplication der Zahlen erfordert eine Kenntniß der Producte aller Einer von 1 bis 9 mit einander multipliciret, oder, welches einerley, des sogenannten Einmal eins. Hat man dieses fertig, sowohl außer als in der Reihe, vorwärts und rückwärts, aus dem Kopfe gelernet, so wird, alle Größen zu multipliciren, nicht schwer fallen.

Der Ursprung dieses Einmal eins, oder die Art, wie man die Producte aller Einer erhält, ist folgender.

Man addiret die 1 einmal, zweymal u. s. w. bis neunmal zu einander, so bekommt man folgende Producte, als 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Auf solche Art verfährt man mit den übrigen Zahlen,

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, jede einmal, zweymal bis neunmal zu addiren, so erhält man von jeder jetzt genannten Zahl die ihr zugehörigen Producte. In nebenstehender Tafel, welche das Pyrhagorische Rechentäflein genannt wird, sind diese Producte eingetragen.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Der Gebrauch gegenwärtiger Tafel ist folgender: z. E. man will 6 mit 4 multipliciren, so sucht man unter 1 in der Länge herunter die Zahl 6, ferner von 1 in der Quere die Zahl 4. In dieser Reihe suchet man unter 4 herunterwärts die Zahl, welche mit ersterer gefundener 6 in gerader Linie stehet, wie hier 24, so ist diese Zahl das Product von 6.4, oder 6 multipliciret mit 4.

Die Auswendiglernung des vorher erwehnten Einmal eins ist aber weit vortheilhafter, mithin

hin sehr dem Gebrauch jetzt gezeigter Tafel vorzuziehen. In jedem gemeinen Rechenbuche findet man dieses Einmal eins.

§. 61. Wir wollen nunmehro zuerst die Multiplication einer zusammen gesetzten mit einer einfachen Zahl zeigen, z. E. es soll 3974 mit 6 multipliciret werden. Die Factores setzet man unter einander, und zwar der Bequemlichkeit wegen den kleinsten unter den größesten, und Einheiten unter Einheiten u. s. w. als

3974 Multiplicandus
6 Multiplicator

23844 Product

und macht einen Strich darunter. Hierauf fängt man mit der niedrigsten Klasse des Multiplicator an die niedrigste Klasse des Multiplicandi zu vermehren, also hier 6 Einer mit 4 Einer sind 24 Einer, wovon 4 unter den Strich in die Klasse der Einer gesetzet, die 2 aber zu dem Product der folgenden Klasse gezählet wird, als 6 mal 7 ist 42 und 2 dazu ist 44, wovon 4 Zehner unter die Zehner, und die andre 4 wieder zu dem Product der folgenden Klasse gezählet wird, nemlich 6 mal 9 ist 54 und 4 dazu ist 58. Hievon wieder 8 unter die Klasse der Hunderter, und 5 zu dem Product der folgenden Klasse, also zu 3.6 gezählet, welches $18 + 5 = 23$ zum Product giebt. Da nun nichts mehr zu multipliciren, so setzet man diese 23 unter den Strich vor die übrigen Zahlen des Products, und ist also

$3974.6 = 23844$

Die-

Dieses erhaltene Product ist aber auch völlig gleich der Summa, welche wir durch eine sechsmalige Addition der gegebenen 3974 erhalten hätten. Z. E.

3974
3974
3974
3974
3974
3974
3974

23844

Gegenwärtiges Beyspiel wird uns aber auch zugleich von dem Vorzug des Gebrauchs der Multiplication in diesem Fall hinlänglich überführen.

§. 62. Bestehet der **Multiplicator** auch aus mehrern Zahlen, (wir setzen zum voraus, daß man allemal die grösseste Zahl zum Multiplicandus erwählet) so ist das Verfahren dem erst gezeigten gleich, außer, daß man die erhaltene **Producte** jeder Zahl des **Multiplicatoris** nach §. 2. gehörig unter einander setzet, und diese **Partialproducte** addiret, so giebt deren **Summa** das verlangte Hauptproduct. Z. E. es sollte 4832 mit 329 multipliciret werden, so wäre

4832 Multiplicandus
329 Multiplicator

43488
9664
14496

1589728 Product

Zuerst

Zuerst multipliciret man in diesem Exempel die Zahl 4832 mit der niedrigsten Klasse des Multiplicators, also mit 9 Einer, und setzet das erhaltene Product, welches = 43488, unter den Strich und zwar 8 Einer unter 9 Einer. Hierauf wird 4832 mit 2 Zehner des Multiplicators vermehrt, giebt zum Product 9664, weil aber dieses Zehner, so wird die erste Zahl 4 unter die 8 Zehner des erstern Products gesetzet. Endlich giebt 4832.3 zum Product 14496. Dieses sind aber Hunderter, mithin wird die 6 unter die 6 des zweyten Products gesetzet. Diese drey erhaltene Partialproducte werden addiret, so ist deren Summa = dem verlangten Hauptproduct, es ist also

4832. 329 = 1589728

Die Regel, welche also bey der Untersetzung der Partialproducte zu beobachten ist, bestehet kürzlich darinn, daß man jede erste Zahl der Partialproducte, von der rechten Hand angerechnet, in den Platz setzet, den eben die Zahl des Multiplicators hat.

§. 63. In dem Multiplicando können zwischen den Zahlen Nullen seyn. Z. E.

20300 Multiplicandus
6 Multiplicator

121800 Product

Hier ist das Product der Einer mit 6 = 0, weil 0 nichts bedeutet, und also auch mit einer Zahl oder diese mit 0 multipliciret, immer nichts bleibet.

Das

Das abermalige Product von 6,0 ist aus eben angeführtem Grunde = 0.

Das Product von 6.3 ist = 18, wovon 8 unter den Strich, die 1 zu dem folgenden Product gerechnet wird.

Das folgende Product von 6.0 ist zwar = 0, weil aber 1 von der vorhergehenden Klasse vorhanden, so ist 0 + 1 = 1.

Das Product von 6.2 ist = 12, welche, weil die Multiplication zu Ende, vor die übrigen Zahlen des Products gesetzet wird. Es ist also

20300.6 = 121800

Man hätte ein gleiches Product erhalten, wenn man zu Anfang den Multiplicator 6 unter die Zahl 3 des Multiplicandi gesetzet, und alsdenn dem Product 1218 die beyden Nullen des Multiplicandi angehänget. Z. E.

20300
6

121800

Auf eben diese Art verfährt man auch, den Platz zu ersparen, wenn in beyden Factoren sich am Ende Nullen befinden, als

843200 Multiplicandus
43600 Multiplicator

50592
25296
33728

36763520000 Product.

Hier

Hier sind dem Product die Nullen des Multiplicandi und Multiplicators angehänget.

Bestehet der **Multiplicator** oder **Multiplicandus** aus 1 und Nullen, so bleiben beyde ohnverändert, und es werden dem **Product** nur die vorhandenen Nullen angehänget. Z. E. es sey

4327 Multiplicandus oder 100000 Multiplicand.
100 Multiplicator — 4908 Multiplicator

432700 Product — 490800000 Product

Sind im **Multiplicator** einzelne oder viele Nullen vorhanden. Z. E.

40394 Multiplicandus
20402 Multiplicator

80788
1615760
807880

824118388 Product.

In diesem Exempel ist das Product der Klasse der Einer des Multiplicatoris = 80788.

Das Product der Zehner des Multiplicatoris = 0. Wir hätten also die ganze Reihe des zweyten Partialproducts mit Nullen ausfüllen müssen, solches thut man aber nicht, sondern lässet selbige ganz weg, oder setzet nur die erste 0 in ihren gehörigen Platz.

Das Product der Hunderter des Multiplicatoris ist = 161576, welches wir gleich der 0 beygefügt, da dieser Platz, welcher den Hunderten gehöret, durch Weglassung der Nullen offen geblieben.

Das Product der Tausender des Multiplicatoris ist wieder = o, welches weggelassen und nur die erste o gesetzet wird.

Das Product der Zehntausender des Multiplicatoris ist = 80788, welches unter die ihm gehörige Klasse, also bey o gesetzet wird.

Auf gleiche Weise verfährt man, wenn im Multiplicatore viele Nullen befindlich. Z. E.

420073 Multiplicandus
200003 Multiplicator

1260219
84014600000

84015860219 Product.

§. 64. Bestehen die Factores aus zusammengesetzten Größen so schließet man die Zahlen, welche einem jeden Factor eigen, in Klammern, und setzet zwischen jedem das Zeichen der Multiplication. Z. E. die Factores wären (9+3−8). (4+6−2). Will man wirklich multipliciren, so addiret man eines jeden Factors Größen zuerst zusammen, und multipliciret alsdenn beyder Summa. Z. E. hier ist der eine Factor 9+3−8 = 12−8 = 4, und der andre Factor 4+6−2 = 10−2 = 8, also beyder Product oder 8.4 = 32.

§. 65. Wir bemerken noch folgende Sätze, deren Befolgung uns sehr oft wichtig werden wird.

Der erste Satz. Eins multipliciret nicht, oder eine Größe mit 1 multipliciret bleibt ungeändert. Dieses ist sehr leicht zu begreifen. Es ist

aber

aber auch eben so wahr, daß eine Größe mit o multipliciret, zu nichts oder = o wird.

Der zweyte Satz. Das Product zwoer Größen enthält den einen Factor so vielmal in sich, als der andere Factor die Einheit. Z. E. das Product von 3.4 = 12. Es enthält also das Product 12 den einen Factor 3 so vielmal in sich, wie der andre Factor 4 die Einheit oder viermal, oder auch 12 enthält den Factor 4 so vielmal in sich, wie der andre Factor 3 die Einheit, also dreymal.

Der dritte Satz. Factores in veränderter Ordnung geben einerley Product. Das im vorhergehenden Satze angeführte Exempel lehret dieses schon; wir sahen nemlich, daß das Product von 4.3 völlig gleich 3.4. Wenn aber auch noch mehrere Factores gegeben, so ist angeführter Satz wahr. Z. E. es sollte 4 mit 5 und dieses Product wieder mit 2 vermehret werden, so wären also hier 4, 5, 2 die Factores. Das Product dieser Factoren muß gleich bleiben, man mag die Multiplication mit der 4, oder 5, oder 2 zuerst anfangen, denn

4.5.2 = 40.
5.4.2 = 40.
5.2.4 = 40.
4.2.5 = 40.
2.5.4 = 40.
2.4.5 = 40.

Auf alle jetzt gezeigte Fälle ist das Product jedesmal 40. Es wird einem jeden leicht seyn, das,

was wir jetzt mit drey Zahlen gezeiget, auch mit mehrern Zahlen zu verrichten. In der Anleitung zur Arithmetik, wovon dieses ein Auszug, ist Kap. IV. §. 76. dieser Satz weitläuftig ausgeführet.

§. 66. Auch Größen, welche durch Buchstaben angezeiget, können mit einander multipliciret werden. Sind in beyden Factoren nur Buchstaben ohne Coefficienten, so werden die Buchstaben nur an einander gesetzt, und zeiget man gleichsam deren Vermehrung nur an. Z. E. die Factores wären a und b, so wäre das Product $= ab$, und $ab.xy = abxy$.

Es ist zwar willkührlich, in welcher Ordnung die Buchstaben des Products gesetzet werden, weil nach §. 65. Factores in geänderter Ordnung einerley Product geben; jedoch pflegt man gerne in diesem Stück der Ordnung des Alphabets zu folgen.

Bestehet einer der Factoren aus Buchstaben, wofür ein Coefficient befindlich, so bleibet solcher ungeändert, weil der Coefficient des andern Factor $= 1$, und dieses nach §. 65. nicht multipliciret, und werden die Buchstaben beyder Factoren selbigem nur angehänget. Z. E.

$$4abc.xyz = 4abcxyz.$$

Sind in beyden Factoren vor den Buchstaben Coefficienten befindlich, so multipliciret man wie gewöhnlich die Coefficienten mit einander, und hängt diesem Product die zusammengesetzten Buchstaben an. Z. E.

$$4aby.3xm = 4.3abyxm = 12abmxy$$

Sind

Sind die Coefficienten der Factoren sehr groß, so ziehet man auch wohl ihre Multiplication durch ein dazwischen gesetzten Punkt nur an, umschließet sie mit Klammern und setzet hinter selbige die Buchstaben. Z. E.

$$392ab \cdot 497xy = (392 \cdot 497)abxy$$

und

$$42ab \cdot 164cd \cdot 234x = (42 \cdot 164 \cdot 234)abcdx.$$

§. 67. Da alle Größen entweder als positive oder negative Größen betrachtet werden können, so finden sich auch bey der Multiplication folgende Vorfälle.

1) Beyde Factores können positive Größen seyn, oder das Pluszeichen haben. Alsdenn ist ihr Product auch eine Plusgröße. Also $4 \cdot 5$ oder $+4 \cdot +5 = +20 = 20$. Denn es ist eben so viel als 4 wirklich 5 mal nehmen; eben so in Buchstaben $+a \cdot +b = a \cdot b = +ab = ab$.

2) Einer der Factoren sey eine Plus- der andere eine Minusgröße, so wird das Product eine Minusgröße. Z. E. $4 \cdot -5 = -20$. Denn ich soll hier nicht den Multiplicandum 4 wirklich 5 mal, sondern das entgegengesetzte oder -5 mal nehmen. Auf gleiche Weise ist das Product -20, wenn der Multiplicandus -4 und der Multiplicator 5 wäre. Denn Factores in geänderter Ordnung geben einerley Product, und hier soll ich -4 wirklich 5 mal nehmen.

3) Beyde Factores sind Minusgrößen.

Hier wird das Product eine Plusgröße. Z. E. —4. —5 = 20.

Der Grund hievon wird vielleicht deutlich, wenn man

1) erwäget, daß, da plus mit minus vermehret, zum Product minus gab, hier nicht wieder zum Product minus kommen kann;

2) daß man hier nicht —4 wirklich 5 mal, sondern das Entgegengesetzte, also —5 mal nehmen soll. Folgendes Gleichniß, welches aber bloß als eine Erläuterung anzusehen, mag dieses Verfahren deutlicher machen. Es sey —4 gleich einer Schuld, welche also das Entgegengesetzte eines Vermögens. Gebe ich nun diese nicht 5 mal, also —5 mal hin, so habe ich wirklich 20 Thaler.

Aus diesen Betrachtungen folget die auf alle Vorfälle in der Multiplication der Zahlen und Buchstaben passende allgemeine Regel.

Einerley Zeichen mit einander multipliciret geben zum Product plus, und verschiedene Zeichen mit einander multipliciret geben zum Product minus. Lateinisch wird dieses kurz ausgedrückt: eadem signa dant plus, diversa minus.

§. 68. Beobachtet man diese bisher gegebene Regeln, so wird die Multiplication mit Buchstaben, wenn auch beyde Factores aus zusammengesetzten Größen bestehen, sehr leicht fallen. Man setzet, so wie bey Zahlen, also auch hier die Factores unter einander, ziehet einen Strich, und mul-

ti-

tipliciret jeden Theil des Multiplicators mit allen Theilen des Multiplicandi, setzet die Partialproducte gleichnamigter Größen unter einander, ziehet wieder einen Strich, addiret die gleichnamigten Glieder der Partialproducte zusammen, setzet deren Summa nebst denen übrigen nicht gleichnamigten Gliedern unter den Strich, so ist selbiges das Hauptproduct. Folgendes Exempel wird die gegebene Vorschrift erläutern. Man multiplicire

$$\begin{array}{r} 3a + 4b - 3c \\ -2b + c \\ \hline +3ac + 4bc - 3cc \\ -6ab - 8bb + 6bc \\ \hline -6ab + 3ac - 8bb + 10bc - 3cc \end{array}$$

Es ist willkührlich, ob man hier vorne oder hinten die Multiplication anfange.

Das Product von $c. - 3c = -3cc$
Das Product von $c. + 4b = 4bc$
Das Product von $c. \quad 3a = 3ac$
Das Product von $-2b. - 3c = 6bc$

Dieses wird unter das schon vorhandene Product $4bc$ gesetzet.

Das Product von $-2b. 4b = -8bb$
Das Product von $-2b. 3a = -6ab.$

Sämtliche Producte addiret geben hier, weil nur $4bc$ und $6bc$ wirklich können addiret werden, zum Hauptproduct

$$-6ab + 3ac - 8bb + 10bc - 3cc$$

oder

$(3a+4b-3c).(-2b+c) = -6ab+3ac-8bb+10bc-3cc.$

Oder es sey gegeben $4a - 6b$

$-3a - 5b$

$-20ab + 30bb$

$-12aa + 18ab$

$-12aa - 2ab + 30bb$

Anfängern zu Gefallen, wollen wir die in diesem Exempel sich befindende Buchstaben in Zahlen verwandeln, und zeigen, wie das Hauptproduct auch diesem gleich sey. Es sey $a = 3$, $b = 4$.

so würde

$4a - 6b = 4.3 - 6.4 = 12 - 24 = -12$

$-3a - 5b = -3.3 - 5.4 = -9 - 20 = -29$

also $12 - 24 = -12$

$-9 - 20 = -29$

$-240 + 480$

$-108 + 216$

$-348 + 696 = 348$

Das Product war auf beyde Fälle 348, und eben so groß muß das Product $-12aa - 2ab + 30bb$ seyn, wenn man die Buchstaben in eben angeführten Werth verwandelt.

denn $-12aa = -12.3.3 = -12.9 = -108$

und $-2ab = -2.3.4 = -2.12 = -24$

also $-12aa - 2ab = -108 - 24 = -132$

und $30bb = 30.4.4 = 30.16 = 480.$

folglich $-12aa - 2ab + 3bb = -132 + 480$

$= 348$, und also gleich dem erstern Product.

§. 69.

§. 69. Wären auch in beyden Factoren Glieder vorhanden, welche blos aus Zahlen bestehen, so beobachten wir auch die gegebene Regel, wie folgendes Exempel zeiget. Z. E.

$$\begin{array}{r} x + 3 \\ x + 4 \\ \hline + 4x + 12 \\ + xx + 3x \\ \hline xx + 7x + 12 \end{array}$$

§. 70. Wenn in allen oder nur einigen Gliedern des erhaltenen Hauptproducts sich gleichnamigte Buchstaben oder Factores befinden, so nimmt man diese zum allgemeinen Factor, schließet die diesem eigene Glieder in Klammern und setzet den allgemeinen Factor darhinter, als in $4aa + 3ab + ax$ wäre a der allgemeine Factor, welcher allen drey Gliedern eigen. Man könnte also dieses Product auch also schreiben

$$(4a + 3b + x)a$$

Dieses Verfahren nennet man Producte verkürzter schreiben, und verschaffet oft großen Nutzen. Diese Verkürzung fällt zwar im Anfange schwer, fleißige Uebung und Lesung algebraischer Bücher werden aber solche in der Folge erleichtern.

§. 71. Bestehen beyde Factoren aus gleichnamigten Buchstaben, so setzet man auf die bisher gezeigte Art ebenfalls die Buchstaben an einander. So wäre Z. E. a mit a multipliciret $=$ aa und aaa multipliciret mit a $=$ aaaa u. s. w. Den Mathematikern schien die oftmalige Aneinandersetzung

gleichnamigter Buchstaben, vornehmlich bey grossen Exempeln sehr unbequem. Sie setzten also an dem Kopfe des Buchstabens oder Zahl eine kleine Zahl, welche anzeigte, wie vielmal der gegebene Buchstabe oder Zahl mit sich selbst vermehret werden sollte, und nenneten diese Zahl den **Exponens**. Z. E. man sollte a mit aa multipliciren, so setzte man anstatt aaa nur a^3, und die oben an a befindliche 3 war der **Exponens**, welcher anzeigte, daß a dreymal mit sich selbst vermehret worden.

Da die Buchstaben allgemein alle mögliche Grössen vorstellen, so kann man auch zu diesem **Exponenten** einen Buchstaben nehmen, und hiesse also z. E. a^m, daß a m mal mit sich selbst multipliciret worden.

Bey der Ansetzung dieses Exponenten ist nur noch zu bemerken, daß solche jederzeit hoch genug am Kopfe der Grösse geschehe, weil sonst ofte ein Irrthum entstehen kann. Z. E. es stünde anstatt a^3, $a3$, so könnte man dadurch verstehen, daß anstatt a dreymal mit sich selbst vermehret, a mit 3 multipliciret worden, welches ein grosser Unterschied wäre. Z. E. a wäre $= 3$, so würde $a^3 = 3^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$, hingegen $a.3 = 3 \cdot 3 = 9$.

§. 72. Die Multiplication der Zahlen oder Buchstaben mit sich selbst wird in der mathematischen Sprache die **Erhebung** einer Grösse zur **Potenz** genennet, und der **Exponens** zeiget, zu welcher **Potenz** selbige erhoben. Z. E. $aaaa = a^4$ wäre zur vierten Potenz erhoben, oder

in

in Zahlen $3.3.3 = 3^3 =$ die dritte Potenz von 3, und wirklich multipliciret $= 27$.

§. 73. Eine jede Größe, es sey Zahl oder Buchstabe, wenn sie noch nicht mit sich selbst multipliciret, befindet sich in der ersten Potenz, und hat zum **Potenzexponenten 1**, z. E. a oder 2 könnte also auch geschrieben werden a^1 oder 2^1. Solches geschiehet aber nicht allezeit. Man bedienet sich nur dieses Ausdrucks, wenn eine solche Größe mit einer andern ihr gleichnamigten soll multipliciret werden. Z. E. $a . a^4 = a^1 . a^4 = a^{1+4} = a^5$.

§. 74 Es sind verschiedene Namen erwählet, mit welchen die Potenzen belegt sind. Die gewöhnlichsten sind folgende:

a oder a^1 die **erste Potenz** oder die **Wurzel** von a.

aa oder a^2 die **zweyte Potenz** oder das **Quadrat** von a.

aaa oder a^3 die **dritte Potenz** oder der **Cubus** von a.

aaaa oder a^4 die **vierte Potenz** oder das **Biquadrat** von a.

aaaaa oder a^5 die **fünfte Potenz** von a. u. s. w.

Die sechste.

§. 75. Will man von einer Potenz die Wurzel oder ihre erste Potenz durch deren ein- oder mehrmalige Multiplication sie entstanden, anzeigen, so setzet man vor selbige das Zeichen $\sqrt{}$, welches Wurzel genannt wird, und in selbiges die Zahl des **Exponenten der Potenz**. So wäre z. E. $\sqrt[3]{a^3}$ die **Cubicwurzel** von a **Cubus** $= a$, weil $a^3 = aaa$ oder durch die dreymalige Multipli-

cas

cation von a mit sich selbst entstanden. Ferner $\sqrt[2]{a^2} = a$, weil $a^2 = aa$. Bey Anzeigung der Quadratwurzel pflegt man niemals in das Radix- oder Wurzelzeichen den Potenzexponenten 2 zu setzen, sondern lässet solchen weg, weil allemal auch $\sqrt{}$ für $\sqrt[2]{}$ angenommen wird; es wäre also $\sqrt[2]{a^2} = \sqrt{a^2} = a$.

Ist der Exponens der Potenz auch eine allgemeine oder Buchstabengröße, so wird auch selbige in das Wurzelzeichen gesetzet. Z. E. $\sqrt[n]{a^n}$ wäre die $n$fache Wurzel von a in der Potenz a, also $= a$.

Was jetzt von Wurzeln vorläufig gesagt, ist zu den folgenden Betrachtungen hinreichend. In dem Kapitel, welches der Lehre von Wurzeln besonders gewidmet, wird alles weitläuftiger ausgeführet werden.

§. 76. Sowohl **gleichnamigte Potenzen** (Potenzen von einerley Buchstaben und Zahlen) als auch **nicht gleichnamigte Potenzen** können mit einander multipliciret werden.

Die Multiplication **gleichnamigter Potenzen**, deren **Exponenten** Zahlen, bestehet in der **Addition ihrer Exponenten**. Z. E. a^3 soll mit a^4 vermehret werden, so hat man hier nur nöthig, die Potenzexponenten 4 und 3 zu addiren, so giebt deren Summa also 7, den **Exponenten des Productes**, es ist dahero $a^3 . a^4 = a^{3+4} = a^7$.

Daß dieses Verfahren richtig, werden wir einsehen, wenn man erwäget, daß $a^3 . a^4 = aaa . aaaa$.

Da

Da nun die Multiplication der Buchstaben in Aneinandersetzung derselben bestehet, so würde das Product von aaa . aaaa = aaaaaaa seyn, welches aber a in der 7ten Potenz, oder a siebenmal mit sich selbst multipliciret, gleich, also muß auch aaaaaaa = a^7 seyn.

Sind die **Exponenten** gleichnamigter Potenzen, welche multipliciret werden sollen, aber Buchstaben, so addiret man selbige, wenn sie gleichnamigt, sind sie aber verschieden, so zeiget man deren Addition durch das Zeichen + nur an. Z. E.

$a^n . a^m = a^{n+m}$, ferner $a^{m+n} . a^{m+n} = a^{m+m+n+n} = a^{2m+2n}$,

und $a^{m+r} . a^{m+n} = a^{m+m+n+r} = a^{2m+n+r}$.

Sind **Coefficienten** vor gleichnamigten Potenzen befindlich, so multipliciret man solche, wie gezeiget. Im übrigen beobachtet man die jetzt gegebene Regeln. Z. E.

$4a . 6a^3 = 4 . 6a^{1+3} = 24a^4$

und $4a^n . 2a^{n+m} = 4 . 2a^{n+n+m} = 8a^{2n+m}$.

Sind die Potenzen nicht gleichnamigt, so multipliciret man zwar die Coefficienten, wenn solche vorhanden, die Größen aber werden nur an einander gesetzet. Z. E.

$4a^3 . 3x = 4 . 3a^3x = 12a^3x$.

Befinden sich aber in denen gegebenen Factoren einige gleichnamigte Größen, so addiret man deren Exponenten, die übrigen nicht gleichnamigten Größen setzet man an einander und verfähret übrigens, wie gezeiget. Z. E.

$4a^4y^3x \cdot 2a^2yb = 4 \cdot 2a^{4+2}y^{3+1}xb = 8a^6y^4xb$
und $4xb \cdot x^2a = 4x^{1+2}ba = 4x^3ab$.

§. 77. Gleichnamigte Potenzen können auch auf die gewöhnliche Art sowohl addiret als auch subtrahiret werden. Bey beyden Fällen bleiben aber ihre Exponenten ohngeändert, und man addiret oder subtrahiret nur ihre Coefficienten, und beobachtet nur die Regeln, welche sowohl von der Addition als Subtraction gleichnamigter Zahlen und Buchstaben in Absicht der Plus- und Minusgrößen gegeben. Z. E. man addire

$4a^2 + 3a^2 + a^2 = (4 + 3 + 1)a^2 = 8a^2$
ferner $6x^2 - 8x^2 = (6-8)x^2 = -2x^2$

In beyden angeführten Exempeln war ein gemeinschaftlicher Factor, als in dem erstern a^2 und im letztern x^2. Wir konnten also hier die §. 70. gezeigte Verkürzung anbringen.

Man subtrahire $3x^3$ von $4x^3$, würde also stehen:

$$\begin{array}{r} 4x^3 \\ 3x^3 \\ - \\ \hline x^3 \end{array}$$

oder von $-7a^2x$ sollte $-9a^2x$ abgezogen werden, wäre

$$\begin{array}{r} -7a^2x \\ -9a^2x \\ + \\ \hline 2a^2x \end{array}$$

§. 78. Sollen aber ungleichnamigte Potenzen addiret oder subtrahiret werden, so zeiget

get man beydes durch das gewöhnliche Zeichen nur an. Z. E. man addire $4a^2x$ und $7b^2y$, so ist solches $= 4a^2x + 7b^2y$.
Oder man subtrahire $5ax$ von $6a^2x^3$, so setzet man $6a^2x^3 - 5ax$, welches verkürzter geschrieben $= (6ax^2 - 5)ax$.

§. 79. Nach allen diesen Vorbereitungen wird es nun nicht schwer fallen, die größesten Exempel zu multipliciren. Folgende berechnete Exempel werden hinreichend seyn, die Anwendung gegebener Regeln sattsam zu zeigen. Z. E.

$$\begin{array}{r} 4a^3x^2 - 3a^2b + 6ab \\ a^3 - 2a^2 \\ \hline -8a^5x^2 + 6a^4b - 12a^3b \\ 4a^6x^2 - 3a^5b + 6a^4b \\ \hline 4a^6x^2 - 8a^5x^2 - 3a^5b + 12a^4b - 12a^3b \end{array}$$

ferner

$$\begin{array}{r} x^3 - ax \\ x^2 + a \\ \hline +ax^3 - a^2x \\ +x^5 - ax^3 \\ \hline x^5 - a^2x \end{array}$$

desgleichen

$$\begin{array}{r} 4a^n - 3a^m \\ -6a^n - 3a^m \\ \hline -12a^{m+n} + 9a^{2m} \\ -24a^{2n} + 18a^{m+n} \\ \hline -24a^{2n} + 6a^{m+n} + 9a^{2m} \end{array}$$

§. 80. Nicht nur einzelne, sondern auch durch die Multiplication, desgleichen durch das Additions- oder Subtractionszeichen verbundene Größen können zu einer Potenz erhoben werden.

Sollen Größen, welche durch die Multiplication verbunden, zu einer verlangten Potenz erhoben werden, so wird eine jede Größe so vielmal

mit

mit sich selbst multipliciret, als die verlangte Größe der Potenz es erfordert. Will man aber deren Erhebung zu der verlangten Potenz nur anzeigen, so schließet man entweder die gegebene Größen in Klammern, und setzet oben am Kopfe dieser Klammer den Exponenten der verlangten Potenz, oder setzet an jede einzelne Größe ohne Klammer diesen Exponenten. Z. E. abx soll zu der dritten Potenz erhoben werden, so zeigte man solches folgendermaßen an

entweder $(abx)^3$ oder $a^3b^3x^3$.

Multiplicirte man hingegen jede Größe wirklich so vielmal, als es erfordert wird, so wäre

$$(abx)^3 = a^3b^3x^3 = aaabbbxxx.$$

Eben so in Zahlen, z. E.

$(2.3)^3 = 2^3.3^3 = 2.2.2.3.3.3 = 8.27 = 216.$

ferner $(ab)^m = a^mb^m$ u. s. w.

Sollen Größen, die durch das Plus- oder Minuszeichen verbunden sind, zu einer Potenz erhoben werden, so multipliciret man selbige nach §. 68. so vielmal mit einander, als die verlangte Potenz es erfordert. Will man aber deren Erhebung zu der verlangten Potenz nur anzeigen, so schließet man die gegebene Größen in Klammern, und setzet, wie gezeiget, oben an selbige den Exponent der verlangten Potenz, oder man setzet die gegebene Größen in Klammern eingeschlossen so vielmal an einander, als der gegebene Exponent es erfordert, und setzet darzwischen das Multiplicationszeichen. So wäre also

$(a+b)^2 = (a+b).(a+b)$ und wirklich multipliciret

$= a^2 + 2ab + b^2$

Eben

Eben so verfährt man auch, wenn Größen, die durch das Minuszeichen verbunden, zu einer Potenz erhoben werden sollen. Z. E.

$(a-b)^2 = (a-b).(a-b) = a^2-2ab+b^2$.

§. 81. Sollen Potenzen zu höhern Potenzen erhoben werden, so verfähret man eben so, daß man selbige so vielmal, wie der gegebene Exponent der verlangten Potenz es erfordert, mit sich selbst multipliciret. Will man diese Erhebung nur anzeigen, so multipliciret man den Exponenten der Potenz mit der Zahl, welche die geforderte Größe der Potenz anzeiget. Z. E. a^4 soll zu der dritten Potenz erhoben werden, so wäre $a^{4.3} = a^{12}$ oder $a^{4.3} = (aaaa)^3 = a^3a^3a^3a^3 = a^{3+3+3+3} = a^{12}$.

Ferner $(2+3)^2$ sollte zur dritten Potenz erhoben werden, so wäre

$(2+3)^{2.3} = (2+3)^6 = 5^6 = 5.5.5.5.5.5 = 15625$.

§. 82. Durch die Division können wir uns überzeugen, daß wir alle Regeln in der Multiplication sowohl der Zahlen als Buchstaben gehörig beobachtet. Am Ende des folgenden Kapitels, welches der Division gewidmet, werden wir auch dieses Verfahren zeigen. Zum Beschluß der Multiplication führen wir noch folgende wichtige Grundsätze an:

1) Gleiches mit Gleichem multipliciret, giebt Gleiches. Z. E.

$$\begin{array}{r} 8 = 8 \\ 4 = 4 \\ \hline 8.4 = 8.4 \\ \hline 32 = 32 \end{array}$$

E

2) Gleiches mit Ungleichem multipliciret, giebt Ungleiches, und der größere Multiplicator giebt ein größers Product als der kleinere. Z. E.

$6 = 6$	oder	$a = 8$
$5 > 3$		$b < 7$
$6.5 > 3.6$		$ab < 8.7$
$30 > 18$		$ab < 56$

Das fünfte Kapitel.

Von der Division in ganzen Zahlen und Buchstaben.

§. 83. In dem dritten Kapitel, welches der Subtraction gewidmet war, untersuchten wir, um wie viel eine Größe größer oder kleiner als die andere war. Wollen wir aber finden, wie vielmal eine Größe von der andern abgezogen werden kann, so lehret uns solches die Division. **Dividiren** heißet also **anzeigen, wie vielmal von einer gegebenen Größe eine andre ihr gleichnamigte abgezogen werden kann.** Z. E. 8 durch 4 dividiren heißet also untersuchen, wie vielmal 4 von 8 abgezogen werden kann. Nach der gewöhnlichen Subtraction würde ich finden, daß solches zweymal geschehen könnte. Denn $8-4=4$ und $4-4=0$. Da nun 4 zweymal von 8 abgezogen worden, ehe die Differenz $=0$,

so

so könnte man auch den Ausdruck gebrauchen, daß 4 in 8 zweymal enthalten sey.

Dividiren wäre also auch die Zahl zu finden, wie vielmal eine Größe in der andern enthalten sey.

Bey großen Exempeln diese Untersuchung durch die Subtraction anzustellen, würde sehr mühsam und weitläuftig seyn. Man hat dahero eine Art, solches leichter und bequemer zu bewerkstelligen, erfunden, welche sich größtentheils auf das §. 7. erklärte decadische Gesetz gründet.

§. 84. Die Division zwoer gegebenen Größen nur anzuzeigen, setzet man folgendes Zeichen (:) zwischen selbige. Man setzet auch wohl die Größe, welche getheilet werden soll, über die Größe, durch welche die Theilung geschehen soll, und unterscheidet beyde durch einen Querstrich. Es würde also

8 dividiret durch 4 angezeiget 8:4 oder $\frac{8}{4}$.

§. 85. Die Größe, welche getheilet werden soll, wird der Dividendus;

Die Größe, wodurch die Theilung geschehen soll, der Divisor;

Die Größe, welche man durch die Theilung erhält, der Quotient genennet. So wäre also

in 8:4 oder $\frac{8}{4}$ der Dividendus 8, der Divisor 4, und der Quotient 2, weil, wie wir §. 83. gesehen, 4 von 8 zweymal abgezogen werden kann, oder 4 in 8 zweymal enthalten.

§. 86. Bey der wirklichen Division ist folgendes zu beobachten:

1) Der Divisor wird in Klammern eingeschlossen unter den Dividendum solchergestalt gesetzet, daß der Wehrt der Summa der über ihm stehenden Zahl des Dividendi entweder eben so groß, oder größer, nie aber kleiner sey.

Hinter den Dividendum macht man herunterwärts einen Strich. Z. E. 38 sollte durch 4 dividiret werden, würde gesetzet

38 |
(4) |

Hier konnte also die 4 oder der Divisor nicht unter die erste Zahl 3 des Dividendi, sondern unter 8 gesetzet werden, weil 3 kleiner als 4. Hingegen bey 24:2 oder 43:2 würde in beyden Fällen der Divisor 2 unter die erste Zahl des Dividendi gesetzet, weil im erstern Fall 2 = 2, und im letztern 4 größer als 2.

2) Durch Hülfe des §. 60. gelehrten Einmal eins sucht man eine Zahl, welche mit dem Divisor multipliciret, entweder völlig oder beynahe gleich der über dem Divisor befindlichen Zahl des Dividendi ist, und setzet solche hinter den Strich.

3) Diese gefundene Zahl, welche der Quotient, wird mit dem Divisor multipliciret, das Product unter den Divisor gesetzet, von der darüber stehenden Zahl des Dividendi subtrahiret, und der Rest, wenn solcher bleibet, darunter gesetzet.

4) Die folgende Zahl des Dividendi, es sey 0 oder eine Zahl, wird bey dem Rest herunter gerückt, der Divisor wieder unter selbige, in Klammern geschlossen, jedoch eine Stelle weiter rechter Hand, gesetzet, der Quotient gesucht und übrigens so verfahren, wie jetzt gezeiget.

5) Sind alsdenn noch mehrere Zahlen im Dividendo vorhanden, so rücket man solche ein nach einander herunter, bis solche zu Ende, beobachtet die gegebene Regeln, so geben die hinter dem Striche befindliche Zahlen den Quotienten, welcher anzeiget, wie vielmal der Divisor im Dividendo enthalten.

6) Bleibet nach geendigter Division des Dividendi ein Rest, welcher aber allemal kleiner wie der Divisor seyn muß, so setzet man solchen neben den Quotienten, und schreibt unter diesen Rest den Divisor nebst darzwischen gezogenem Strich, um anzuzeigen, daß dieser Rest noch durch den Divisor getheilet werden müsse. Ein solcher Rest heißet ein Bruch, wovon gehörigen Orts weitläuftiger geredet werden wird.

§. 87. Folgendes Exempel wird die Anwendung gegebener Regeln deutlich zeigen. Z. E. es soll 4891 durch 3 dividiret werden, also wäre

Der Dividendus = 489 | 1630 1/3 Quotient
Der Divisor = (3)

3

18
(3)
18

9
(3)
9

1
(3)
0

1

Die erste Zahl des Dividendi ist = 4. Weil nun der Divisor 3 kleiner als 4, so wird 3 unter 4 gesetzet.

Durch Hülfe des Einmal eins finden wir keine Zahl, welche mit dem Divisor 3 multipliciret = 4 ist. Denn 2.3 ist = 6, also schon größer. Es ist dahero 1 der Quotient, weil 1.3 am nächsten der 4, und man setzet 1 hinter den Strich. Das Product von 1.3 = 3 wird unter den Divisor gesetzet, und von der über dem Divisor stehenden Zahl 4 des Dividendi subtrahiret, giebt zum Rest 1.

Die folgende Zahl 8 des Dividendi bey dem Rest 1 herunter gerückt, den Divisor 3 eine Stelle weiter rechter Hand darunter, also unter 18 gesetzet, und 18 durch 3 dividiret, giebt zum Quotienten 6, weil 6.3 = 18, mithin gleich der Zahl des Dividendi. Diese 6 wird bey der Zahl 1 des

er-

erstern Quotienten gesetzet, das Product 6.3 = 18 unter den Divisor gesetzet, und von der Zahl 18 des Dividendi subtrahiret. Da nun 18 — 18 = 0, und Null vor einer Zahl nichts bedeutet, so setzet man solche nicht zum Rest, sondern rücket nur die folgende Zahl 9 des Dividendi herunter. Unter diese wird der Divisor 3 gesetzet, weil dieses die ihm eigene Stelle. Der Quotient von 9:3 oder $\frac{9}{3}$ ist = 3, weil 3.3 = 9. Man setzet diesen Quotienten 3 wieder bey die erstern Zahlen des Quotienten 16 hinter den Strich. Das Product 3.3 von dem Dividendo 9 subtrahiret, gehet wieder auf.

Endlich die letzte Zahl 1 des Dividendi heruntergerückt, den Divisor darunter gesetzet. Weil aber 1 kleiner als 3, so wird der Quotient hier = 0, und selbige bey die andern Zahlen des Quotienten gesetzet. Das Product von 0.3 ist nach §. 65. = 0, dieses von 1 subtrahiret = 1. Weil nun keine Zahl im Dividendo mehr vorhanden, so wird dieser Rest 1 mit untergesetzter 3 dem Quotienten angehänget, und ist also

1630$\frac{1}{3}$ der gesuchte Quotient

oder 4891 : 3 = 1630$\frac{1}{3}$.

§. 88. Betrachten wir jetzt berechnetes Exempel genau, so finden wir, daß die erste Zahl des Dividendi in der Klasse der Tausender sich befindet, und die andern Hunderter, Zehner und Einer sind. Wir sehen also, daß der Rang jedes Zahlzeichens im Quotienten bereits durch die Stelle

des Zahlzeichens im Dividendo bestimmmet wird. Dieses wird auf alle mögliche Divisionsexempel passen.

§. 89. Beobachten wir nicht nur diese jetzigen, sondern auch bey der Addition, Subtraction und Multiplication gegebene Regeln, so wird es uns nicht schwer fallen, eine Größe auch mit mehr als einer Zahl zu dividiren. Wir bemerken nur noch, daß, wenn der Divisor aus mehr als einer Zahl bestehet, die Erwählung des Quotienten Vorsicht erfordert, damit solcher nicht zu groß genommen werde, um den dadurch zu befürchtenden, wiewohl geringen Schaden der doppelt angewendeten Mühe zu verhüten. Nebenstehendes berechnetes Exempel wird hinreichend seyn, die Division einer Größe durch mehr als eine Zahl zu zeigen. Z. E. 48940748 : 4703 stünde also

Dividendus 48940748 | 10406$\frac{1}{4}\frac{3}{7}\frac{3}{8}\frac{0}{3}$ Quotient
Divisor (4703)

47403

1910
(4703)

19507
(4703)

15847

3954
(4703)

39548
(4703)

38478

1330

§. 90. Sind am Ende des Divisors Nullen, so streicht man im Dividendo von den niedrigsten Stellen oder Klassen so viele Zahlzeichen ab, als Nullen im Divisor sind, setzet solche an den Quotienten mit zum Rest, und schreibt darunter den Divisor. Z. E.

48934 | 12 3 3 4 / 3 6 0 0
(38) 00 |
38

1.00
(38)
76

33

§. 91. Sind sowohl im Dividendo als Divisor am Ende Nullen, so streicht man zwar von beyden gleich viel Nullen ab, die abgestrichenen Nullen des Dividendi aber werden nicht zum Rest gesetzet, es wäre dann, daß noch ein Rest von der Division mit den übrigen Zahlen bliebe. In der Lehre von Brüchen werden wir aber auch zeigen, daß dieses eigentlich nicht nöthig. Z. E.

```
ℵ.ℬ9842ø00| 1925 25700/3842
(3842)    00|
 ℬ842
-------
ℬ5.5.6.4
(3842)
 ℵ5ℵ8
-------
98.6.2
(3842)
 7684
-------
2.2780
(3842)
 1921ø
-------
 2570
```

In diesem Exempel wurden die abgeschnittenen 00 des Dividendi und Divisors dem Rest angehänget, obgleich $\frac{25700}{3842}00 = \frac{2570}{3842}$, wie wir bey der Lehre von Brüchen sehen werden.

Ferner

```
ℵ6ℬ6.2.0.ℬ6ℵ4ø00| 85
(900729844)    00|
ℵ2ø5838ℵ52
----------
45ø3649220
(900729844)
 45ø3649220
----------
```

Hier bleibt nach geendigter Division kein Rest, es werden dahero die abgestrichene Nullen des Dividendi und Divisors gänzlich weggelassen.

§. 92. Bestehet der Divisor aus 1 und Nullen, so streichet man nur so viel Zahlzeichen im

im Dividendo von der rechten Hand an ab, als Nullen im Divisor enthalten, so giebt der Rest des Dividendi den Quotienten, weil 1 nicht dividiret; die abgeschnittenen Zahlzeichen werden mit untergesetztem ganzem Divisor dem Quotienten angehänget. So wäre also z. E.

$$48974 : 1000 = 48\tfrac{974}{1000}.$$

§. 93. Ist der Dividendus und der Divisor von gleicher Größe, so ist der Quotient = 1,

also $8 : 8 = \frac{8}{8} = 1.$

Eben so gewiß ist es auch, daß

$$0 : 0 = \frac{0}{0} = 1.$$

Denn nichts ist in nichts, wenn der Ausdruck verstattet, nur einmal enthalten.

Zum Beschluß der Division mit Buchstaben, werden wir sowohl die §. 82. versprochene Probe der Multiplication durch die Division, als auch die Probe der Division durch die Multiplication zeigen, und zugleich verschiedene allgemeine Lehren über die Division beyfügen.

§. 94. Die Division mit Buchstaben, welche wir jetzt lehren wollen, zeiget man entweder nur an, oder man dividiret wirklich.

Die Anzeigung derselben geschiehet auf die bey Zahlen gezeigte Art. Z. E.

$a : b$ oder $\frac{a}{b}$; ferner $ab : bx$ oder $\frac{ab}{bx}$ u. s. w.

Bestehen der Dividendus und Divisor aus zusammengesetzten Größen, welche durch die Addition oder Subtraction entstanden, so werden auch wohl beyde in Klammern eingeschlossen, und das Zeichen der Division darzwischen gesetzet. Z. E. a+b:m+n würde auch angezeiget (a+b):(m+n).

Die wirkliche Division ist sehr leicht. Wir wissen, daß die Multiplication der Buchstaben in Aneinandersetzung derselben bestand; so war z. E. a mit b multipliciret = ab.

Da nun die Division eine der Multiplication entgegengesetzte Handlung ist, so werden durch Dividiren die Buchstaben wieder getrennet, welche durch die Multiplication verbunden; es wäre also

$ab:b = \frac{ab}{b} = a$, oder der Quotient von ab:b

wäre a, und b wäre also in ab, a mal enthalten.

§. 95. Die Verschiedenheit der Zeichen plus und minus, womit Größen bezeichnet sind, haben, so wie bey der Multiplication auf die Zeichen des Products, auch hier auf die Zeichen des Quotienten großen Einfluß. Es gilt hier ebenfalls die Regel, welche §. 67. gegeben, und erkläret, daß **einerley Zeichen, plus, verschiedene Zeichen, minus** geben.

Ist also der Dividendus und der Divisor eine **Plus**, oder beyde eine **Minus**größe, so wird auf beyde Fälle der Quotient eine **Plus**größe.

Also ab:b = a und −ab:−b = a,

Ist der Dividendus aber eine **Minus**, und

der

der Divisor eine Plus- oder ersterer eine Plus- und letzterer eine Minusgröße, so wird allemal der Quotient eine Minusgröße. Es ist also

$$-ab:a = -b \text{ und } ab:-a = -b.$$

Der Beweiß von allen jetzt gezeigten Fällen ist sehr leicht. Wurde das Product zwoer Plusgrößen sowohl, wie das Product zwoer Minusgrößen wieder eine Plusgröße, und das Product zwoer entgegengesetzter Größen eine Minusgröße, so folget ganz natürlich, daß, da die Division das wieder trennet, was die Multiplication verbunden hat, auch eben die Zeichen der Größen als bey der Multiplication entstehen müssen.

§. 96. Was ferner bey dieser Division zu beobachten, wollen wir bey folgenden Fällen zeigen.

§. 97. Der erste Fall. Wenn der Dividendus sowohl als der Divisor aus einem Gliede bestehet. Hier ist die Division sehr leicht, denn wir haben bereits §. 94. gesehen, daß man nur nöthig hat, die im Dividendo und Divisore vorhandene gleichnamigte Buchstaben gegen einander aufzuheben, und die übrigen Buchstaben nebst ihnen gehörigen Zeichen zum Quotienten zu setzen. Es wäre also

$$-abx : -b = ax.$$

Sind aber im Dividendo und Divisore keine gleichnamigte Buchstaben, so zeiget man deren Division nach §. 94. nur an, jedoch haben auch hier die Zeichen einen Einfluß auf den Quotienten. Also

$$-abx$$

$$-abx : mn = -\frac{abx}{mn} \text{ und } -abx : -mn = \frac{abx}{mn}$$

Sind im Dividendo und Divisore gleichnamigte Buchstaben, und nur im Dividendo ein Coefficient, so wird selbiger ohngeändert dem auf erst gezeigte Art erhaltenen Quotienten vorgesetzet. Z. E.

$$4ab : -b = -4a$$

Ist im Divisor aber der Coefficient nur befindlich, so setzet man solchen unter den Quotienten. Z. E.

$$ab : 4b = \frac{a}{4} \text{ und } -abx : 4xc = -\frac{ab}{4c}$$

Sind in beyden Größen Coefficienten, so dividiret man solche, wie gewöhnlich, gehet solches nicht, so setzet man selbige nach §. 85. bruchweise vor den Quotienten. Z. E.

$$4ab : 2b = 2a \text{ und } -3abx : 4x = -\frac{3ab}{4}$$

Ist der Divisor und Dividendus gleich groß, so ist auch hier der Quotient = 1. Allein auch hier hat die Regel wegen der Zeichen ihren Einfluß, also

$$-4ab : -4ab = \frac{-4ab}{-4ab} = 1$$

hingegen

$$-4x : 4x = \frac{-4x}{4x} = -1.$$

Auch dieses gilt von Zahlen; es ist also

$-8 : -8 = 1$; hingegen $-8 : 8 = -1$.

Ist der Divisor = 1; so ist auch hier der Quotient = dem Dividendo, und das Zeichen des

Quo-

Quotienten richtet sich nach der gegebenen Vorschrift. Es wäre also

$-abx : 1 = -abx$ und $-24 : 1 = -24$

hingegen

$-abx : -1 = abx$ und $-24 : -1 = 24$.

Dieses gilt auch, wenn der Dividendus aus zusammengesetzten Größen bestünde.

§. 98. Der zweyte Fall. Der Dividendus bestehet aus zusammengesetzten, und der Divisor aus einer einfachen Größe.

Der Divisor wird zuerst gesetzet, und mit einer Klammer eingeschlossen. Der Dividendus wird gegenüber nach der rechten Hand zu geschrieben, die Glieder desselben nach den Buchstaben des Divisors rangiret, mithin allemal die Glieder, in welchen der Buchstabe des Divisors am mehrsten vorhanden, vorangesetzet, und hinter selbige herunterwärts ein Strich gezogen.

Z. E. $12abc - 9cx : 3c$ stünde also

$$\begin{array}{r|l} 3c)\ 12abc - 9xc & 4ab - 3x \\ 12abc & \\ \hline - & \\ \hline - 9xc & \\ - 9xc & \\ + & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Hierauf dividiret man das erste Glied des Dividendi, also $12abc$ durch $3c$ giebt zum Quotienten $4ab$. Das Product von $4ab \cdot 3c = 12abc$ wird unter das erste Glied gesetzet, davon nach §. 52.

durch

durch Verkehrung des Zeichens des Subtrahendi, subtrahiret ist = 0. Das zweyte Glied des Dividendi also — 9xc herunter gerückt, und durch 3c dividiret = — 3x. Das Product — 3x. 3c = — 9xc unter den Dividendum gesetzt, auf erst gezeigte Art subtrahiret = 0. Also ist 4a — 3x der Quotient von

(12abc — 9xc) : (3c).

§. 99. Der dritte Fall. Der Dividendus bestehet aus einer einfachen, und der Divisor aus einer zusammengesetzten Größe. Z. E. es soll a durch m+n dividiret werden. Jetzt zeigen wir bloß diese Division nur an; es ist also

$$a:(m+n) = \frac{a}{m+n}$$

Bey der Lehre von Brüchen werden wir die wirkliche Division bey dergleichen Vorfällen zeigen.

§. 100. Der vierte Fall. Sowohl der Dividendus als Divisor bestehet aus zusammengesetzten Größen.

Lassen sich die gegebene Größen nicht dividiren, so zeiget man die Division auf die bereits oft gelehrte Art an; kann aber die Theilung geschehen, so verfährt man folgendergestalt:

1) Sowohl die Glieder des Dividendi als Divisoris, in welchen gleichnamigte Buchstaben vorhanden, setzet man voran, und zwar allemal die größesten Potenzen zuerst. Z. E. der Dividendus wäre — bx + 3ab — 2ax + 6aa, und der Divisor wäre — x + 3a, so setzte man die Glieder

des

des Dividendi und Divisors, weil in beyden a am häufigsten vorkommt, also auf

$$6aa + 3ab - 2ax - bx : 3a - x$$

2) Das erste Glied des Dividendi wird durch das erste Glied des Divisoris getheilet, so bekommt man einen Theil des Quotienten, welchem das nach §. 95. gehörige Zeichen gegeben wird.

3) Dieser gefundene Theil des Quotienten wird mit allen Gliedern des Divisoris multiplicirt, die erhaltene Producte unter die selbigem gleichnamigte Glieder des Dividendi gesetzet, davon subtrahiret, so giebt der Rest den neuen Dividendum. Dessen erstes Glied wird wieder durch das erstere Glied des Divisoris getheilet, so bekommt man das zweyte Glied des Quotienten. Mit diesen verfährt man wieder wie angezeiget. Dieses setzet man so lange fort, bis endlich alles aufgehet.

4) Findet sich aber, wie es denn oft geschiehet, daß zu denen durch die Multiplication des einen Gliedes des Quotienten mit allen Gliedern des Divisors erhaltene Producte keine gleichnamigte Glieder im Dividendo enthalten, so setzet man diese Glieder des Products mit veränderten Zeichen nach §. 52. zum Dividendo unter den Strich.

5) Gehet nach genugsam wiederholter Division nicht alles gegen einander auf, so setzet man den Rest nebst untergesetztem Divisor zum Quotienten, wie bey den Zahlen §. 86. gelehret.

Bey der Division zusammengesetzter durch zusammengesetzte Größen fällt es einem Anfänger, ja oft selbst einem Geübten schwer, bey dem ersten

Blick zu beurtheilen, ob der Dividendus durch den Divisor theilbar. Der Versuch muß dieses allein zeigen. Ueberhaupt ist es allemal mühsam, dergleichen große Exempel zu dividiren; sie kommen zwar nicht oft vor, man muß aber dennoch das Verfahren wissen.

§. 101. Folgendes Exempel wird die Anwendung gegebener Regeln deutlicher zeigen. Z. E. der Dividendus wäre $6aa - 2ax + 3ab - bx$ und der Divisor $3a - x$

$$
\begin{array}{l|l}
3a - x) \; 6aa - 2ax + 3ab - bx & 2a + b \\
\quad 6aa - 2ax & \\
\quad - \quad + & \\
\hline
\qquad + 3ab - bx & \\
\qquad + 3ab - bx & \\
\qquad - \quad + & \\
\hline
\qquad 0 \quad 0 &
\end{array}
$$

In diesem Exempel ist der Quotient von $6aa$ dividiret durch $3a = 2a$. Das Product von $2a. (3a - x) = 6aa - 2ax$, welches unter die, diesem gleichnamigte Glieder des Dividendi, also unter $6aa - 2ax$ gesetzet und davon abgezogen, gehet auf. Hierauf die folgende Glieder des Dividendi $3ab - bx$ herunter gerücket. Der Quotient von $3ab : 3a = b$, welcher bey das erste Glied $2a$ des Quotienten gesetzet wird. Das Product von $b. (3a - x) = 3ab - bx$ wird unter die ihnen gleichnamigte Glieder des Dividendi $3ab - bx$ gesetzt, davon subtrahiret, gehet auf. Es ist also $2a + b$ der gesuchte Quotient oder

$$(6aa - 2ax + 3ab - bx) : (3a - x) = 2a + b.$$

Wäre

Wäre der Dividendus $= 8ax + 4ab + 9cx - 3bc$ und der Divisor $= 4a - 3c$, so stünde solches

$$\begin{array}{l|l} 4a-3c)\ 8ax+4ab+9cx-3bc & 2x+b\ \frac{15cx}{(4a-3c)} \\ \quad 8ax\quad -6cx & \\ \quad - \quad + & \\ \hline \quad +4ab+15cx-3bc & \\ \quad +4ab\quad -3bc & \\ \quad - \quad + & \\ \hline \quad +15cx & \end{array}$$

§. 102. Durch die Division werden wir überzeuget, daß wir bey der Multiplication zwoer Grössen, sowohl in Zahlen als Buchstaben, gehörig verfahren haben. Wir wissen nach §. 59. daß das Product zwoer Größen durch die Multiplication der Factoren entstanden, es war also der Multiplicandus, mit dem Multiplicator multipliciret, gleich dem Product. Wenn also M = dem einen Factor oder **Multiplicando** und m = dem andern Factor oder **Multiplicator** und P = dem **Product**, so ist in Zeichen:

$$M \cdot m = P.$$

Dividiren wir nun das erhaltene Product wieder durch den einen Factor, so muß der Quotient gleich seyn dem andern Factor. Wird also das Product durch den Multiplicator dividiret, so ist der Quotient gleich dem Multiplicando. Wird hingegen das Product durch den Multiplicandum dividiret, so ist der Quotient gleich dem Multiplicator; oder in Zeichen

$$M \cdot m = P.$$

$$\text{also} \quad M = \frac{P}{m}$$

$$\text{und} \quad m = \frac{P}{M}$$

oder in Zahlen $8 \cdot 4 = 32$

$$\text{also} \quad 8 = \frac{32}{4} = 8.$$

$$\text{und} \quad 4 = \frac{32}{8} = 4.$$

§. 103. Durch die Multiplication hingegen erfahren wir, ob bey der Division alle Regeln gehörig beobachtet.

Der Quotient entstand nach §. 85. aus der Division des Dividendi durch den Divisor. Multipliciret man nun den Quotienten wieder mit dem Divisor, so muß das Product seyn gleich dem Dividendo. Dieses gilt auf alle Fälle, sowohl in Zahlen als Buchstaben.

Z. E. der Dividendus sey $= D$, der Divisor $= d$, und der Quotient $= Q$, so würde

$$D : d = \frac{D}{d} = Q$$

$$\text{folglich} \quad D = Qd$$

oder in Zahlen $28 : 4 = \frac{28}{4} = 7$

$$\text{folglich} \quad 28 = 7 \cdot 4 = 28$$

Es

Es ist aber auch eben so wahr, daß der Dividendus durch den Quotienten dividiret, gleich dem Divisor ist. Also da

$$D : d = \frac{D}{d} = Q$$

folglich $D = dQ$

und $\frac{D}{Q} = d$

oder in Zahlen $28 : 4 = \frac{28}{4} = 7$

folglich $28 = 4 \cdot 7$

und $\frac{28}{7} = 4$

Man kann also ein Divisionsexempel auf zwo Arten probiren.

1) Wenn man mit dem Divisor den Quotienten multipliciret, und zu dem Product den Rest, wenn solcher bey der Division entstanden, addiret.

2) Wenn man den Dividendum durch den Quotienten dividiret.

Durch erstere Art giebt das Product den Dividendum, durch letztere giebt der Quotient den Divisor.

§. 103. In der Lehre von der Multiplication §. 76. zeigten wir gleichnamigte Potenzen zu multipliciren. Jetzt wollen wir deren Division lehren.

Die Multiplication gleichnamigter Potenzen bestand nach angeführtem §. 76. in der Addition ihrer

ihrer Exponenten. Da nun die Division nach §. 94. eine der Multiplication, und die Subtraction nach §. 54. eine der Addition entgegengesetzte Handlung ist, so folget, daß die Division gleichnamigter Potenzen in der Subtraction ihrer Exponenten bestehen muß. Z. E.

$a^4 . a^3 = a^{4+3} = a^7$. Es muß also $a^7 : a^3 = a^{7-3} = a^4$

denn $a^7 : a^3 = aaaaaaa : aaa = \frac{aaaaaaa}{aaa} = aaaa$

$= a^4 = a^{7-3}$

oder da $a^m . a^n = a^{m+n}$, folglich $a^{m+n} : a^n = a^{m+n-n}$

$= a^m$

ferner $a^4x^2 : a^3x = a^{4-3}x^{2-1} = a^1x^1 = ax$.

§. 104. Wenn der Exponens des Divisoris bey gleichnamigten Potenzen größer ist, als des Dividendi Exponens, so verfähret man ebenfalls auf jetzt gezeigte Art, nur wird alsdenn der Exponens des Quotienten eine Minusgröße. Z. E.

$a^4 : a^5 = a^{4-5} = a^{-1}$

Was aber a^{-1} bedeutet und wie wir solches auf eine andre Art benennen können, werden wir gleich zeigen.

§. 105. Bestehet der Dividendus und Divisor aus keinen gleichnamigten Potenzen, so zeiget man deren Division ebenfalls nur an. Z. E.

$x^3 : a^2$ bleibet $x^3 : a^2$ oder $\frac{x^3}{a^2}$.

Sind hingegen im Dividendo und Divisore nur einige gleichnamigte Potenzen, so dividiret man selbige wie gezeiget; die ungleichnamigten im Dividen-

videndo setzet man alsdenn ohnverändert an den Quotienten.

Sind aber im Divisore ungleichnamigte Potenzen vorhanden, so setzet man selbige unter den Quotienten, oder neben solchen mit darzwischen gemachten Divisionszeichen. Z. E.

$$a^4y^3x : a^5y^2 = a^{4-5}y^{3-2}x = a^{-1}y^1x = a^{-1}yx$$

und

$$a^6x^3y^4 : axy^2m = a^{6-1}x^{3-1}y^{4-2} : m = a^5x^2y^2 : m = \frac{a^5x^2y^2}{m}.$$

§. 106. In der Lehre von der Multiplication gleichnamigter Potenzen §. 74. fanden wir auch, daß je öfterer eine Potenz mit ihrer Wurzel vermehret wurde, desto größer sie auch wurde. Z. E.

$$x.x = x^{1+1} = x^2 \text{ und } x^2.x = x^{2+1} = x^3.$$

Würden wir diese Multiplication jedes Products mit x fortsetzen, so erhielten wir folgende Reihe von Potenzen x, x^2, x^3, x^4, u. s. w.

Dividiren wir hingegen x^4 durch x und den folgenden Quotienten wieder durch x, so werden wir eine fallende Reihe von Potenzen erhalten, als

$$\frac{x^4}{x} = x^4 : x^1 = x^{4-1} = x^3$$

$$\frac{x^3}{x} = x^3 : x^1 = x^{3-1} = x^2$$

$$\frac{x^2}{x} = x^2 : x^1 = x^{2-1} = x^1 = x$$

$$\frac{x}{x} = x : x = 1 = x^0$$

$\frac{x^1}{x} = x^1 : x^1 = x^{1-1} = x^0 = 1$ nach §. 93.

$\frac{1}{x} = x^0 : x^1 = x^{0-1} = x^{-1}$

$\frac{1}{x} : x = x^{-1} : x^1 = x^{-1-1} = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$ u. s. w.

Wir sehen hieraus, daß die Glieder der abnehmenden Potenzen beständig also auf einander folgen. Die hierunter gesetzte Größen sind einander völlig gleich, als

$x^4, x^3, x^2, x^1, x^0, x^{-1}, x^{-2} \ldots x^{-n}$

$x^4, x^3, x^2, x, 1, \frac{1}{x}, \frac{1}{x^2} \ldots \frac{1}{x^n}$

Wir werden in der Folge den großen Nutzen erkennen, welchen uns diese gleiche Ausdrücke, da man einen für den andern, z. E. für x^{-1} auch $\frac{1}{x}$ setzen kann, verschaffen.

§. 107. Eine Größe in der Potenz 0 ist also allezeit $= 1$. Es ist aber auch wahr, daß $(a+b)^0 = 1$ ist. Nicht weniger ist $0^0 = 1$, weil $0^0 = 0:0 = \frac{0}{0}$ und dieses nach §. 93. $= 1$.

Es wird nun nicht schwer seyn, auch folgende Exempel zu dividiren, als

$x^3y^2a^4 : x^4y^3a = x^{3-4}y^{2-3}a^{4-1} = x^{-1}y^{-1}a^3 = \frac{1}{xy}a^3$

$= \frac{a^3}{xy}$

desgleichen $x^3ab^3 : xab = x^{3-1}a^{1-1}b^{3-1} = x^2a^0b^2 = x^2b^2 1 = x^2b^2$

ferner — $x^3a^2y^4 : x^4a^3y^4 = -x^{3-4}a^{2-3}y^{4-4}$

$= -x^{-1}a^{-1}y^0 = \frac{1}{xa} 1 = -\frac{1}{xa}$.

§. 108. Eine gegebene Potenz wurde zu einer andern verlangten Potenz erhoben, wenn nach §. 81. ihr Exponent mit dem verlangten Grade der Potenz multipliciret wurde. So war z. E. a^3 zur vierten Potenz erhoben $= a^{3 \cdot 4} = a^{12}$.

Es lassen sich aber auch diese Exponenten der Potenzen durch die Division wieder erniedrigen. Daß eine Wurzel oder $\sqrt{}$ eine Größe sey, die etlichemal mit sich selbst multipliciret, eine Potenz hervorbringt, haben wir §. 75. gezeiget. Wir können also im ersterwähnten Exempel a^3 als eine Wurzel betrachten, welche durch eine viermalige Multiplication mit sich selbst die Potenz a^{12} hervorgebracht.

Wollen wir nun diese vierfache Wurzel wieder haben, so ist es natürlich, daß solches durch die Division geschehen muß, und wäre also

$$\sqrt[4]{a^{12}} = a^{12} : 4 = a^{\frac{12}{4}} = a^3$$

Die Regel also, die Wurzeln der Exponenten zu finden, welche verlanget werden, ist folgende.

Man dividiret den Exponenten der Potenz mit dem gegebenen Exponenten der Wurzel, so zeiget der Quotienten Exponent die verlangte Wurzel an.

Also $\sqrt[6]{a^{12}} = a^{12:6} = a^{\frac{12}{6}} = a^2$

ferner $\sqrt[3]{a^3} = a^{3:3} = a^{\frac{3}{3}} = a^1 = a$

und $\sqrt[n]{a^n} = a^{n:n} = a^{\frac{n}{n}} = a^1 = a$

Setzet man den Exponenten der Wurzel unter den Exponenten der Potenz, so bleibet das Wurzelzeichen oder $\surd$ weg.

Lässet sich auch der Exponens der Potenz durch den Exponenten der Wurzel nicht dividiren, oder sind beyde keine gleichnamigte Buchstaben, so zeiget man die Division nur an, und lässet alsdenn auch das Zeichen $\surd$ weg. Z. E.

$$\sqrt[4]{a^3} = a^{3:4} = a^{\frac{3}{4}}$$

und $\sqrt[n]{a^m} = a^{m:n} = a^{\frac{m}{n}}$

§. 109. Auch aus Größen, welche durch die Multiplication verbunden, kann man die verlangte Wurzel ziehen. Da aber der Exponent einer jeden Größe durch die Multiplication mit sich selbst entstanden, so muß auch aus jeder Größe die verlangte Wurzel auf gezeigte Art gezogen werden. Z. E.

$$\sqrt[3]{a^3y^6x} = a^{\frac{3}{3}}y^{\frac{6}{3}}x^{\frac{1}{3}} = a^1y^2x^{\frac{1}{3}} = ay^2x^{\frac{1}{3}} = ay^2.\sqrt[3]{x}$$

§. 110. Diese jetzt gezeigte Art, anstatt des Wurzelzeichen den Exponenten desselben unter den Exponenten der Potenz zu setzen, ist nicht nur gewöhnlich, sondern auch von einem sehr großen Nutzen. Wir bemerken vorläufig von selbigen noch,

daß,

daß, wenn selbige gleichnamigt, und gleichnamigte Wurzelexponenten haben, sie nach vorher gezeigter Art sowohl multipliciret als auch dividiret werden können. So wäre z. E.

$$\sqrt{x^3} \cdot \sqrt{x^4} = x^{\frac{3}{2}} \cdot x^{\frac{4}{2}} = x^{\frac{3}{2}+\frac{4}{2}} = x^{\frac{3+4}{2}} = x^{\frac{7}{2}} = \sqrt{x^7}$$

und

$$\sqrt[5]{a^7} : \sqrt[5]{a^6} = a^{\frac{7}{5}} : a^{\frac{6}{5}} = a^{\frac{7}{5}-\frac{6}{5}} = a^{\frac{7-6}{5}} = a^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{a}$$

In der Lehre von Brüchen werden wir solches weitläuftiger erklären, auch zugleich zeigen, wie zu verfahren, wenn die Wurzelexponenten nicht gleichnamigt sind.

§. 111. Wir wollen noch einige Divisionsexempel nur ausgearbeitet, doch ohne weitere Erklärung anführen, in welchen die Potenzen nach §. 76. angezeiget sind. Z. E. man dividire

$$\begin{array}{l|l}
-3a-5b) -12a^2- 2ab+30b^2 & 4a-6b \\
\quad -12a^2-20ab & \\
\hline
\quad +\quad +\quad\quad\quad

ferner

$$\begin{array}{l|l}
1 - 3a^3 + 4a^2b - 5xb) - 12as + 16a^4b - 9a^3x - 15x^2b + 8a^2bx \; | \; 4a^2 + 3x \\
\quad - 12as + 16a^4b \qquad\qquad\qquad\

auch Gleiches zum Quotienten, oder wenn zwey oder mehrere ganz gleiche Größen durch einerley Divisor dividiret werden, so müssen auch bey allen gleiche Quotienten kommen. Z. E.

$$36 = 6.6 = 3.12 = 4.9.$$

Würde eine jede dieser Größen durch 4 dividiret, so würden alle Quotienten auch einander gleich seyn,

also $\frac{36}{4} = \frac{3.12}{4} = \frac{4.9}{4} = 9$

2) Gleiche Größen mit ungleichen Größen dividiret, giebt ungleiche Quotienten, und zwar wird der Quotient am größesten, da der Divisor am kleinsten. Z. E.

$24 = 3.8$		oder	$a = 12$
$8 > 4$			$b < 4$
$24:8 < (3.8):4$			$a:b > 12:4$
$3 < 6$			

3) Ungleiche Größen mit gleichen Größen dividiret, geben ungleiche Quotienten, und wird der Quotient der größesten Größe auch der größeste seyn. Z. E.

$24 > 12$		oder	$a < b$
$3 = 3$			$c = c$
$24:3 > 12:3$			$a:c < b:c$
$8 > 4$			

4) Eine Größe mit einerley Größe zugleich multipliciret und dividiret bleibet ungeändert. Z. E.

$$\frac{24.3}{3} = \frac{72}{3} = 24 \text{ und } \frac{ab}{b} = a.$$

5)

5) Der Dividendus und Divisor in einer Größe zugleich durch einerley Größe multipliciret oder dividiret, lässet den Quotienten ohnverändert. Z. E.

$$24:4=6 \quad \text{oder} \quad a:b=Q$$

$$\frac{24\cdot 4}{4\cdot 4}=\frac{96}{16}=6 \qquad \frac{an:bn=Q}{\frac{a:n}{b:n}=Q}$$

$$\frac{24:4}{4:4}=\frac{6}{1}=6$$

6) Wenn man eine Anzahl von Größen hat, welche durch die Addition verbunden, und man dividiret sie durch einerley Größe, so ist der Quotient mit der Größe einerley, welcher entstehet, wenn man jede dieser Größen einzeln durch den gegebenen Divisor dividirte, und die einzelnen erhaltene Quotienten addirte. Z. E. es wären die gegebene Größen $a+b+c$. Jede einzelne Größe sollte durch n dividiret werden, so muß

$$\frac{a}{n}+\frac{b}{n}+\frac{c}{n}=\frac{a+b+c}{n}$$

oder in Zahlen

$$\frac{6}{3}+\frac{9}{3}+\frac{12}{3}=\frac{(6+9+12)}{3}=\frac{27}{3}=9 \text{ denn}$$

$$\frac{6}{3}+\frac{9}{3}+\frac{12}{3}=2+3+4=9.$$

Auf beyde Fälle ist der Quotient $=9$. Dieses beweiset die Richtigkeit unsers Satzes. Wir behalten uns vor, den allgemeinen Beweiß hievon als

auch von dem folgenden Lehrsatz bey mündlichem Unterricht zu führen, und verweisen jetzt unsere Leser auf die Schrift, wovon dieses ein Auszug ist.

7) Wenn das **Dividendum** eine Differenz zwoer Größen ist, so ist es einerley, ob man die gegebene Größen erst von einander abziehet und den Rest durch den gegebenen Divisor dividiret, oder ob man jede einzelne Größe dividiret und nachher die Quotienten von einander abziehet. Z. E.

$\frac{20-8}{4} = \frac{12}{4} = 3$ und $\frac{20-8}{4} = \frac{20}{4} - \frac{8}{4} = 5-2$

$= 3$. Auf beyde Fälle ist der Quotient $= 3$.

Das sechste Kapitel.

Von der Addition, Subtraction, Multiplication und Division in benamten Zahlen.

§. 113. Zahlen, welche wirkliche Dinge, die da sind, oder im gemeinen Leben vorkommen, in sich enthalten, werden **benamte Zahlen** genennet. Z. E. die Zahl 4 ist eine unbenamte, hingegen 4 Thaler eine benamte Zahl.

§. 114. Sowohl die Vergrößerung als Verkleinerung der benamten Zahlen ist der bey unbenamten Zahlen gezeigten völlig gleich. Das Gesetz, nach welchem bey benamten Zahlen einige Einheiten der niedrigen Ordnung eine Einheit der

nächst

nächst höhern ausmachen, ist aber von dem decadischen Gesetz, welches bey denen unbenamten Zahlen eingeführet, oft sehr unterschieden. Wem also dieses Gesetz bekannt, dem wird es nicht schwer fallen, alles, was bisher von unbenamten Zahlen gelehret, auch mit benamten Zahlen zu verrichten. In allen gewöhnlichen Rechenbüchern findet man von diesem Gesetz ein Verzeichniß; es würde also überflüssig seyn, solches hier anzuführen.

§. 115. Es ist sehr natürlich, daß sowohl durch die Addition als Multiplication die niedrigen Einheiten der benamten Zahlen oft so groß werden, daß selbige eine oder mehrere Einheiten der nächst höhern Ordnung in sich enthalten. Diese Einheiten der höhern Benennung zu erhalten, ist alsdenn erforderlich, entweder die Summa oder das Product durch die Zahl, aus welcher die Einheit der nächst höhern Benennung bestehet, zu dividiren. Z. E.

Man hätte durch die Addition oder Multiplication 43 mgr. erhalten. Da nun bekannt, daß 36 mgr. = 1 Thaler, so müste 43 durch 36 dividiret werden, wenn man für 43 mgr. einen schicklichern Ausdruck finden wollte. Dividiren wir wirklich, so finden wir, daß

$$43 : 36 = \frac{43}{36} = 1 \text{ Thlr. } 7 \text{ mgr.}$$

§. 116. Bey der Addition benamter Zahlen findet auch die §. 2. gegebene Regel statt. Man kann also auch hier nur gleichnamigte Dinge addi-

addiren. Sind benamte Zahlen zu addiren gegeben, so setzet man

1) gleichnamigte Größen unter einander, und addiret selbige.

2) Besteht die Summa der kleinern Benennung aus Einheiten der nächstfolgenden höhern Benennung, so dividiret man selbige durch die Zahl, welche die Einheit der höhern Benennung anzeiget. Den erhaltenen Quotienten addiret man zu der folgenden höhern Benennung. Hierin bestehet das ganze Verfahren bey jetzt gelehrter Addition, alles übrige ist dem bey unbenamten Zahlen Gezeigten völlig gleich.

Ein Beyspiel wird hinreichend seyn, das gelehrte deutlicher zu zeigen. Z. E. man addire 3 Thlr. 7 mgr. 4 pf. und 2 Thlr. 9 mgr. 3 pf. ferner 2 mgr. 6 pf. Es wird also aufgesetzet:

3 Thlr. 7 mgr. 4 pf.
2 Thlr. 9 mgr. 3 pf.
2 mgr. 6 pf.

---

5 Thlr. 19 mgr. 5 pf.

Bey der kleinsten Benennung, also hier bey den Pfennigen, fänget man die Addition an. Die Summa der Pfennige ist = 13. Will nun 8 pf. = 1 mgr. so wird 13 dividiret durch 8. Der Quotient 1, welcher = 1 mgr. wird unter die Mariengr. und zwar alle Verirrung zu verhüten, durchstrichen gesetzet; der Rest 5, welcher = 5 pf. wird unter den Strich unter die Pfennige gesetzet. Die Summa der Mgr. ist = 19 mgr. Will nun 36 mgr.

= 1 Thaler, und 19 weniger als 36, so werden selbige unverändert unter den Strich unter die Mariengr. gesetzet. Die Summa der Thaler ist = 5, welche gleichfalls unter die Thaler gesetzet werden.

§. 117. Bey der Subtraction benamter Zahlen haben wir weiter nichts anzuführen, als wenn der Fall sich äußert, daß man borgen muß, (wanneher und warum solches geschiehet, ist §. 40. angezeiget) die geborgte Einheit nicht zehn Einheiten der nächst niedrigern Benennung, sondern so viele Einheiten giebt, wie die Art der Sache nach der eingeführten Gewohnheit des Orts es erfordert; so wäre z. E. eine geborgte 1 bey mgr. = 8 pf. Hingegen bey ggr. = 12 pf. u. s. w.

Die übrigen bey der Subtraction in unbenamten Zahlen gegebene Regeln behalten auch hier ihre Gültigkeit. Z. E. es soll von 27 Thlr. 16 mgr. 4 pf. subtrahiret werden 24 Thlr. 35 mgr. 7 pf. Es wäre also

Minuendus = 27. Thlr. 16. mgr. 4 pf.
Subtrahendus = 24 Thlr. 35 mgr. 7 pf.

Differenz = 2 Thlr. 16 mgr. 5 pf.

Da 7 pf. größer als 4 pf. mithin nicht davon abgezogen werden kann, so wird von 16 mgr. eine Einheit geborget, welches mit einem (.) bey 16 bemerket wird. Diese erborgte 1 ist = 1 mgr. = 8 pf. selbige zu den 4 pf. des Minuendi addiret sind = 12 pf., hievon 7 abgezogen = 5, welche unter die Pfennige gesetzet wird. Ferner, da

35 mgr.

35 mgr. größer als 15 mgr., welche durch verborgte Einheit zu 15 geworden, so wird bey 27 Thlr. Eins geborget, welches = 36 mgr., hiezu die 15 mgr. des Minuendi addiret sind = 51 mgr., hievon 35 mgr. subtrahiret = 16 mgr., welche unter die Mariengr. gesetzet werden. Endlich 24 Thaler von 26 Thaler, welche nach verborgter Eins hiezu geworden, abgezogen ist = 2 Thaler, folglich ist 27 Thlr. 16 mgr. 4 pf. — 24 Thlr. 35 mgr. 7 pf. = 2 Thlr 16 mgr 5 pf.

Man hätte auch bey gegenwärtigem Exempel die im §. 52. bey Buchstaben gelehrte Art der Subtraction anwenden können, und wir werden finden, daß die gegebene allgemeine Regel auf alle Fälle passet. Z. E.

27 Thlr. + 16 mgr. + 4 pf.
24 Thlr. + 35 mgr. + 7 pf.
— — —

3 Thlr. — 19 mgr. — 3 pf.

Wir erhalten hier zwar, da wir durch Verkehrung der Zeichen des Subtrahendi die Subtraction in eine Addition verwandelt haben, anstatt obiger 2 Thaler 16 mgr. 5 pf. zur Differenz 3 Thlr. — 19 mgr. — 3 pf., welches aber hiemit einerley ist, wie man leicht finden wird.

§. 118. Auch bey benamten Zahlen überzeuget uns die Addition von dem richtigen Subtrahiren gegebener Größen. Der Subtrahendus plus der Differenz muß auch hier = seyn dem Minuendo. Z. E. im erstern Exempel war

der Minuendus = 27 Thlr. 16 mgr. 4 pf.
der Subtrahendus = 24 Thlr. 35 mgr. 7 pf.
die Differenz = 2 Thlr. 16 mgr. 5 pf.

es muß also

24 Thlr. 35 mgr. 7 pf. + 2 Thlr. 16 mgr. 5 pf.
= 27 Thlr. 16 mgr. 4 pf.

Daß auch solches zutrift, zeiget nebengesetzte Berechnung

24 Thlr. 35 mgr. 7 pf.
2 Thlr. 16 mgr. 5 pf.
7 7

27 Thlr. 16 mgr. 4 pf.

§. 119. Bey der **Multiplication benamter Zahlen**, es mögen solche aus einem oder mehrern Gliedern bestehen, bemerken wir folgende Regeln:

1) Alle Glieder der gegebenen Größe werden mit dem Multiplicator, welcher allemal eine unbenamte Zahl ist, multipliciret.

2) Ist alsdann das Product der kleinern Benennung größer oder eben so groß, als eine Einheit der nächst höhern Benennung, so wird jenes durch diese dividiret, der Quotient zu der nächst höhern Benennung addiret, und der Rest, wenn solcher vorhanden, unter die ihm an Benennung gleiche Größe gesetzet.

Z. E. man soll 6 Thlr. 14 mgr. 4 pf. mit 8 multipliciren; es ist also

6 Thlr. 14 mgr. 4 pf. Multiplicandus
8 Multiplicator

48 Thlr. 112 mgr. 32 pf. Product.

Das

Das Product der Pfennige ist = 32, weil aber 8 pf. = 1 mgr., so wird 32 : 8 = 4 mgr., diese zu 112 als dem Product der mgr. addiret = 116 mgr. Da nun 36 mgr. = 1 Thlr., so wird 116 : 36 = 3 Thlr. 8 mgr., hievon werden die 8 mgr. unter die Mariengr. gesetzt, die 3 Thaler aber zu dem Product 48 addirt = 51 Thaler, es ist also (6 Thlr. 14 mgr. 4 pf.) . 8 = 51 Thaler 8 mgr. Man hätte dieses Exempel auch folgendergestalt berechnen können, daß man die ganze gegebene Größe zu der kleinsten Benennung, also zu Pfennigen gemacht (die gewöhnlichen Rechenbücher nennen solches **resolviren**) und hierauf das erhaltene Product mit 8 multipliciret. Es ist aber dieses Verfahren weitläuftiger und mühsamer.

§. 120. Bestehet der Multiplicandus bey benamten Zahlen aus Plus- und Minusgrößen, so verfähret man auch hier nach denen §. 67. gegebenen Regeln. Z. E.

4 Thlr. — 3 mgr. + 4 pf. multipliciret mit 6 stünde also

4 Thlr. — 3 mgr. + 4 pf.
6

24 Thlr. — 18 mgr. + 24 pf.

24 Thlr. — 18 mgr. + 3 mgr.

24 Thlr. — 15 mgr.

23 Thlr. + 36 mgr. — 15 mgr.

23 Thlr. + 21 mgr.

Das Product der Pfennige war 24, welche = 24:8 = 3 mgr., diese zu dem Product der mgr. = — 18 mgr. addirt = — 15 mgr., das Product der Thaler ist = 24; es ist also (4 Thlr. — 3 mgr. + 4 pf). 6 = 24 Thlr. — 15 mgr. = 23 Thlr. + 36 mgr. — 15 mgr. = 23 Thlr. + 21 mgr.

§. 121. Bey der Division benannter Zahlen bemerken wir folgende zwey Hauptfälle. Entweder man soll eine oder mehrere Größen von geringerer Benennung zu höherer Benennung bringen, oder eine gegebene benamte Zahl, die aus einem oder mehrern Gliedern bestehet, durch eine andere gegebene Zahl dividiren.

Bey ersterm Fall dividiren wir nach §. 115. die gegebene Größen durch die Zahl, aus welcher die Einheit der höhern Benennung bestehet. Z. E. 4320 mgr. sollen zu Thaler gemacht werden. Da nun 36 mgr. = 1 Thaler, so werden 4320 durch 36 dividiret, und geben zum Quotienten 120 Thaler.

4320 | 120
36

72
(36)
72

000
(36)

Bestehet bey letzterm Fall der Dividendus aus einem Gliede, so verfähret man wie bey der Di-

Division in unbenamten Zahlen. Sind alsdenn im Quotienten Einheiten einer größern Benennung enthalten, so beobachtet man die §. 115. gegebene Regel. Z. E. 3694 Pfennige sollen in 24 Theile getheilet werden. Durch die Division erhalten wir $153\frac{22}{24}$ pf. zum Quotienten. Weil aber in 153 pf. noch Groschen enthalten, so dividiret man diese durch 8, und bekommt 19 mgr. und 1 pf. bleibt übrig. Es ist also 3694 pf. dividiret durch 24 = 19 mgr. $1\frac{22}{24}$ pf., wie aus nebengesetzter Berechnung zu ersehen

3694 | 153 $\frac{22}{24}$ pf. 153 | 19 $\frac{1}{8}$ mgr. = 19 mgr. $1\frac{22}{24}$ pf.
(24)	(8)
134
(24)
130

94
(24)
22

Bestehet der Dividendus aus mehrern Gliedern, so fängt man die Division von der größesten Benennung an, der erhaltene Quotient ist alsdenn ein Theil des Hauptquotienten. Bleibet ein Rest, so macht man solchen zu der nächst niedrigen Benennung, addiret selbigen zu der ihm gleichnamigten Größe. Auf solche Art verfährt man mit allen Gliedern des Dividendi bis die Division geendiget. Z. E. 4328 Thlr. 22 mgr. 4 pf. sollen

durch 32 dividiret werden. Man theilet also zuerst 4328 Thlr. durch 32 wie folget:

4328 | 135 Thaler.
(32)

112
(32)
96

168
(32)
160

8

Hier ist der Quotient = 135 Thaler. Der Rest 8 wird mit 36 multipliciret, um selbigen zu der nächst niedrigern Benennung zu bringen. Dessen Product ist = 288 mgr. Hiezu die im Dividendo vorhandene 22 mgr. addiret geben 310 mgr., diese durch 32 dividiret = 9 mgr. als

310 | 9 mgr.
(32)
288

22

Der Rest 22 mgr. wird durch die Multiplication mit 8 zu Pfennigen gemacht, geben 176. Hiezu di im Dividendo befindlichen 4 Pfennige addiret, sind = 180, und durch 32 dividiret = $5\frac{20}{32}$ pf.

180 | $5\frac{20}{32}$ pf.
(32)
160

20

Der

Der Rest 20 wird, weil keine kleinere Benennung vorhanden, nebst untergesetztem Divisor dem Quotienten beygefügt. Alle diese erhaltene Quotienten machen den Hauptquotienten aus; es ist also (4328 Thlr. 22 mgr. 4 pf.) : 32 = 135 Thl. 9 mgr. $5\frac{20}{32}$ pf.

Einen gleichen Quotienten würden wir erhalten haben, wenn wir, wie §. 119. bey der Multiplication erwähnet, den gegebenen Dividendum erst zu der kleinsten Benennung gebracht, und alsdenn durch den Divisor getheilet hätten. Jetzt gezeigte Art ist aber bequemer und kürzer.

Der Dividendus kann auch aus Größen bestehen, deren Summa durch die Addition, oder das Product durch die Multiplication, oder der Rest durch die Subtraction den Dividendum giebt. Z. E. es würde zu wissen verlangt, wie viel ein jeder von 4 Personen, welche gemeinschaftlich in eine Lotterie gesetzet, gewonnen, wenn der Einsatz eines jeden 2 Thlr. 19 mgr. betragen, und folgende Gewinne erfolget wären, als 240 Thlr. ferner 135 Thlr. und 72 Thlr. Man siehet sehr leicht ein, daß hier vor der Bestimmung des Gewinns einer jeden Person, welches durch die Division geschiehet, sowohl die Ausgabe als Einnahme bekannt seyn muß. Die Ausgabe von einer Person war 2 Thlr. 19 mgr., also von Personen = (2 Thlr. 19 mgr.) . 4 = 8 Thlr. + 76 mgr.

$$= 8 + \frac{76}{36} \text{ Thlr.} = 10 \text{ Thlr. } 4 \text{ mgr.}$$

Die Einnahme betrug 240 + 135 + 72 Thlr. = 447 Thaler.
Der sämtliche Gewinn beträgt 447 Thlr. — 10 Thlr. 4 mgr. = 436 Thlr. 32 mgr., und hierinnen müssen sich die 4 Personen theilen. Es wird also (436 Thlr. 32 mgr.) : 4 = 109 Thlr. 8 mgr. = dem Gewinn einer jeden Person.

Bey solchen vorkommenden Fällen kommt es allein auf eine gute Beurtheilung an, durch welche Rechnungsart der Dividendus gefunden werden kann, und lassen sich hiezu keine Regeln geben.

§. 122. Die Probe der Multiplication geschiehet auch hier durch die Division, so wie die Probe der Division durch die Multiplication verrichtet wird. Ist also im erstern Fall der Quotient = dem Multiplicando, und im letztern Fall das Product = dem Dividendo, so sind auf beyde Fälle die gegebene Regeln beobachtet. Da also (4 Thlr. + 3 mgr.) . 4 = 16 Thlr. + 12 mgr.

so muß $\frac{16 \text{ Thlr.} + 12 \text{ mgr.}}{4} = 4 \text{ Thl.} + 3 \text{ mgr.}$

ferner (8 Thlr. + 14 mgr.) : 2 = 4 Thlr. + 7 mgr.
es muß also auch (4 Thlr. + 7 mgr.) . 2 = 8 Thlr. + 14 mgr.

Das siebende Kapitel.

Von den Brüchen.

§. 123 In denen bisher gezeigten Divisionsexempeln der unbenamten Zahlen war der Dividen-

den-

bendus entweder eben so groß oder größer wie der Divisor. Im erstern Fall war der Quotient = 1, im letztern > als 1.

Wir wollen jetzt das Verfahren zeigen, wenn der Dividendus kleiner als der Divisor. Es sey der Dividendus = 1 und der Divisor = 2. Es wäre also $1:2 = \frac{1}{2}$. Hier kann der Quotient weder = 1, noch weniger größer als 1 seyn, es muß aber doch ein Quotient hievon da seyn, weil eine jede Zahl wenigstens in Gedanken theilbar. Der Quotient wird also hier nur aus Theilen eines Ganzen bestehen, und diese Theile werden ein **Bruch** genennet.

Der Quotient von 1:2 wäre also = der Hälfte von 1 oder = **ein Halb.**

Ein jeder Bruch stellet dahero den Quotienten einer Größe vor, in welcher der Dividendus kleiner als der Divisor, und bekommt seinen Namen von der Anzahl Theile, in welche die Einheit getheilet ist. Z. E. $\frac{1}{3}$ heißet **ein Drittel**, $\frac{1}{5}$ **ein Fünftel** u. s. w.

Ueberhaupt kann ein jedes Divisionsexempel als ein Bruch betrachtet werden. Ist alsdenn der Dividendus größer oder eben so groß wie der Divisor, so werden solche zu Unterscheidung ersterer **Brüche unächte Brüche** genennet. Z. E. $\frac{4}{4}$ und $\frac{8}{3}$ sind also **unächte**, hingegen $\frac{3}{4}$ und $\frac{4}{7}$ **ächte Brüche.**

§. 124. Bey einem Bruch wird die obere Zahl oder der Dividendus der **Zähler**, und der Divisor oder die untere Zahl der **Nenner** genennet. Die untere Zahl **nennet** oder zeiget an, in wie viel Theile die Einheit getheilet, und die obere Zahl **zählet** die vorhandene Theile der getheilten Einheit.

Bey der Aussprache der Brüche wird zuerst der Wehrt des Zählers, und hierauf der Wehrt des Nenners nebst angehängter Silbe **Theil** oder **tel** genennet. Z. E. $\frac{3}{4}$ wird ausgesprochen drey **Viertel**. In diesem Bruch zeiget der Nenner, daß die Einheit in vier Theile getheilet, und der Zähler zeiget, daß von dieser in 4 Theile getheilten Einheit 3 Theile vorhanden.

§. 125. Da Buchstaben alle mögliche Größen vorstellen, so können auch Brüche durch Buchstaben angezeiget werden. Sowohl die Benennung als Aussprache derselben ist erstern völlig gleich. Z. E. $\frac{n}{m}$ heißet nmtel, und ist n der Zähler und m der Nenner. Es gilt auch hier die §. 123 angeführte Regel, daß, wenn der Zähler so groß wie der Nenner, der Bruch = 1, es ist also $\frac{m}{m}$ oder $\frac{a}{a} = 1$.

§. 126. Brüche von verschiedenen Zählern und Nennern können entweder einander völlig gleich seyn, oder sind in der Größe unterschieden. Diese angestellte Beurtheilung der Größe gegebe-

ner

ner Brüche wird die Vergleichung der Brüche genennet.

§. 127. Sind die gegebene Brüche von gleichen Nennern, so ist diese Vergleichung nicht schwer; es würde gewiß der Bruch der größeste seyn, welcher den größesten Zähler hätte. Z. E. es wären $\frac{3}{5}$ und $\frac{4}{5}$ zu vergleichen gegeben, so ist ganz begreiflich, daß, da 4 größer als 3, und beyder Nenner gleich groß, $\frac{4}{5} >$ als $\frac{3}{5}$ seyn muß.

Sind aber die Nenner der Brüche ungleich, z. E. $\frac{4}{5}$ und $\frac{5}{7}$, welcher von beyden wird alsdenn der größeste Bruch seyn?

Da hier die Nenner nicht gleichnamigt, so müssen solche unter einerley Benennung gebracht werden.

Nach §. 112. bleibt eine Zahl durch einerley Zahl multipliciret und zugleich dividiret ohngeändert. Würde also auch bey einem Bruch der Zähler und Nenner desselben durch einerley Zahl multipliciret, so würde die durch den Bruch angezeigte Größe auch ohngeändert bleiben, also der Bruch $\frac{4}{5} = \frac{4.2}{5.2} = \frac{8}{10}$.

Mit welcher Zahl müssen aber die gegebene Brüche multipliciret werden, damit selbige unter einerley Benennung kommen? Die bequemste Zahl hiezu ist der Nenner der übrigen Brüche. Wird also jedes Bruchs Zähler und Nenner mit dem Nenner der übrigen gegebenen Brüche multipliciret, so müssen die Nenner sämtlicher Brüche einander gleich seyn, also $\frac{4}{5}$ und $\frac{5}{7}$ unter einerley Benennung gebracht, wäre $= \frac{4.7}{5.7}$ und $\frac{5.5}{7.5} = \frac{28}{35}$ und $\frac{25}{35}$.

Da

Da nun $\frac{4}{5} = \frac{4.7}{5.7} = \frac{28}{35}$ und $\frac{5}{7} = \frac{5.5}{7.5} = \frac{25}{35}$, so folget, daß $\frac{4}{5}$ größer als $\frac{5}{7}$.

§. 128. Bey Brüchen von Zahlen, welche unter einerley Benennung gebracht werden sollen, sind öft die Nenner so beschaffen, daß sie durch die Multiplication oder Division dieser oder jener Zahl den übrigen Nennern gleich werden. Man hat alsdenn nur nöthig, mit dieser gefundenen Zahl den Zähler und Nenner zu multipliciren oder zu dividiren. Dieses Verfahren gründet sich auf den im vorhergehenden §. angeführten Satz. Z. E. folgende Brüche $\frac{4}{9}$, $\frac{5}{18}$ sollten unter einerley Benennung gebracht werden. Da nun der Nenner $18 = 9.2$, so würde nur erforderlich seyn, sowohl den Zähler als Nenner des Bruchs $\frac{4}{9}$ mit 2 zu multipliciren, und beyde Brüche erhielten hiedurch gleiche Nenner, als

$\frac{4}{9}$ und $\frac{5}{18} = \frac{4.2}{9.2}$ und $\frac{5}{18} = \frac{8}{18}$ und $\frac{5}{18}$

Eine vielfältige Uebung wird diese Vortheile von selbst lehren.

§. 129. Brüche, die noch so verschieden aussehen, können nach §. 126. einander völlig gleich seyn. So ist z. E.

$\frac{3}{5} = \frac{18}{30} = \frac{54}{90}$, denn $\frac{18}{30} = \frac{3.6}{5.6}$ und $\frac{54}{90} = \frac{3.18}{5.18}$.

Da es nun allemal bequemer, einen gegebenen Bruch in der kleinsten Benennung vorzustellen, so ist es nöthig, selbigen zu der kleinsten Benennung zu bringen. Dieses geschiehet durch die Division des Zählers und Nenners durch einerley Zahl. Bey Brüchen von wenig Zahlen kann man diesen Divisor durch Versuche leicht finden, bey großen

Brü-

Brüchen haben wir eine Regel in der Schrift, wovon dieses der Auszug ist, pag. 266. §. 185. gegeben, die man nachlesen kann, weil es zu weitläuftig seyn würde, sie hier anzuführen.

§. 130. Unächte Brüche zu der kleinsten Benennung zu bringen, dividiret man zuerst den Zähler, weil solcher der größeste, durch den Nenner, und setzet den Rest nebst untergesetztem Nenner an den Quotienten; ist alsdenn der Rest theilbar, so verfähret man, wie gezeiget. Z. E.

$$\frac{38}{4} = 9\frac{2}{4} = 9\frac{2:2}{4:2} = 9\frac{1}{2}.$$

Hier war der angehängte Rest $\frac{2}{4}$ durch 2 theilbar.

§. 131. Brüche, die aus Buchstaben mit oder ohne Coefficienten bestehen, können alsdenn zu kleinerer Benennung gebracht werden, wenn entweder sowohl im Zähler als Nenner Coefficienten vorhanden, zu denen ein gemeinschaftliches Maaß zu finden, oder im Zähler und Nenner gleichnamigte Buchstaben befindlich, oder beydes vorhanden. Auf alle Fälle gilt die gegebene Regel. Z. E.

$$\frac{3ax}{27a} = \frac{3ax:3a}{27a:3a} = \frac{x}{9} \quad \text{ferner} \quad \frac{4ab}{12ab} = \frac{4ab:4ab}{12ab:4ab} = \frac{1}{3}$$

$$\text{oder} \quad \frac{6ab}{9bx} = \frac{6ab:3b}{9bx:3b} = \frac{2a}{3x}.$$

§. 132. Eine jede Größe, sie mag durch eine Zahl oder Buchstabe angezeiget seyn, kann als ein Bruch betrachtet werden, dessen Nenner $= 1$, also $a = \frac{a}{1}$ und $6 = \frac{6}{1}$. Den Nutzen dieses Ausdrucks werden wir in der Folge einsehen.

§. 133.

§. 133. Die Addition der Brüche von gleichen Nennern bestehet allein in Addirung der Zähler mit untergesetztem gemeinschaftlichen Nenner. Z. E.

$$\frac{3}{4}+\frac{1}{4}+\frac{2}{4}=\frac{3+1+2}{4}=\frac{6}{4}=1\frac{2}{4}=1\frac{2:2}{4:2}=1\frac{1}{2}$$

ferner $\frac{a}{b}+\frac{c}{b}+\frac{d}{b}=\frac{a+c+d}{b}$.

Der Grund hievon ist deutlich, denn wir wissen, daß gleichartige Dinge zusammen gezählet werden können. Die gegebenen Größen sind von solcher Beschaffenheit, indem deren Nenner einander gleich; man hat also hier nur nöthig, die vorhandene Theile des Ganzen zu addiren, und unter deren Summe den Namen des Ganzen zu setzen.

§. 134. Die Addition der Brüche von ungleichen Nennern ist ersterer völlig gleich, wenn zuforderst nach §. 127. die Brüche unter einerley Benennung gebracht sind; so wäre z. E.

$$\frac{3}{4}+\frac{4}{5}+\frac{6}{7}=\frac{3.5.7}{4.5.7}+\frac{4.4.7}{5.4.7}+\frac{6.4.5}{7.4.5}=\frac{105}{140}+\frac{112}{140}+\frac{120}{140}$$
$$=\frac{105+112+120}{140}=\frac{337}{140}=2\frac{57}{140}$$

ferner $\frac{a}{b}+\frac{m}{n}+\frac{c}{x}=\frac{a.n.x}{b.n.x}+\frac{m.b.x}{n.b.x}+\frac{c.b.n}{x.b.n}$

$$=\frac{anx+mbx+cbn}{bnx}.$$

Unächte Brüche von ungleichen Nennern werden auf gleiche Art addiret. Z. E.

$$\frac{9}{5}+\frac{7}{3}=\frac{9.3}{5.3}+\frac{7.5}{3.5}=\frac{27}{15}+\frac{35}{15}=\frac{27+35}{15}=\frac{62}{15}=4\frac{2}{15}.$$

Auch ganze Zahlen zu Brüchen addiren, geschiehet auf nemliche Art; man verwandelt nur die ganze

Zahl

Zahl nach §. 132. durch untergesetzte 1 in einen Bruch. Es wäre also

$$3 + \frac{6}{7} = \frac{3}{1} + \frac{6}{7} = \frac{3.7}{1.7} + \frac{6.1}{7.1} = \frac{21+6}{7} = \frac{27}{7}.$$

Noch kürzer aber wird die Addition ganzer Zahlen zu Brüchen verrichtet, wenn man die ganze Zahl mit dem Nenner des gegebenen Bruchs multipliciret, zu dem Product den Zähler addiret und unter die Summa den vorigen Nenner setzt. So ist z. E. $3 + \frac{6}{7} = \frac{3.7+6}{7} = \frac{21+6}{7} = \frac{27}{7}$

Sind mehrere Zahlen nebst angehängten Brüchen zu addiren gegeben, so addiret man zuerst die ganzen Zahlen, und hierauf die Brüche, wie gezeiget. Ist alsdenn der erhaltene Bruch ein ächter Bruch, so setzet man selbigen an die Summa der ganzen Zahlen; ist aber selbiger ein unächter Bruch, so sucht man durch die Division des Zählers durch den Nenner die darinn vorhandene Ganze, addiret den erhaltenen Quotienten zu der Summa der ganzen Zahlen, und an selbige setzet man den Rest nebst untergesetztem Nenner in seiner kleinsten Benennung. Z. E.

$$4\frac{3}{8} + 6\frac{2}{3} + 9\frac{4}{5} = 4 + 6 + 9 + \frac{3}{8} + \frac{2}{3} + \frac{4}{5}$$
$$= 19 + \frac{3.3.5}{8.3.5} + \frac{2.8.5}{3.8.5} + \frac{4.8.3}{5.8.3} = 19 + \frac{45+80+96}{120}$$
$$= 19 + \frac{221}{120} = 19 + 1 + \frac{101}{120} = 20 + \frac{101}{120}.$$

§. 135. Bey der Subtraction der Brüche bemerken wir folgendes:

1) Sind die Nenner gleich, so subtrahiret man den Zähler des Subtrahendi von dem Zähler des Minuendi, und setzet unter die Differenz den Nenner ohnverändert. Z. E.

$\frac{4}{5} - \frac{3}{5} = {}^{4-3}_{5} = \frac{1}{5}$ und $\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}$.

2) Sind die Nenner ungleich, so bringt man die Brüche unter einerley Benennung, und subtrahiret, wie gezeiget. Z. E.

$\frac{4}{5} - \frac{3}{4} = \frac{4.4}{5.4} - \frac{3.5}{4.5} = \frac{16}{20} - \frac{15}{20} = \frac{16-15}{20} = \frac{1}{20}$

und $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a.d}{b.d} - \frac{c.b}{d.b} = \frac{ad-cb}{bd}$.

Ist auf beyde Fälle der Zähler des Subtrahendi größer als der Zähler des Minuendi, so wird die Differenz eine Minusgröße. Z. E.

$\frac{4}{5} - \frac{6}{7} = \frac{4.7}{5.7} - \frac{6.5}{7.5} = \frac{28}{35} - \frac{30}{35} = \frac{28-30}{35} = -\frac{2}{35}$.

3) Ist der Minuendus ein Bruch und der Subtrahendus eine ganze Zahl, oder jener eine ganze Zahl und dieser ein Bruch, so verwandelt man die ganze Zahl durch untergesetzte 1 in einen Bruch, und verfähret übrigens, wie gezeiget. Z. E.

$4 - \frac{3}{4} = \frac{4}{1} - \frac{3}{4} = \frac{4.4}{1.4} - \frac{3}{4} = \frac{16}{4} - \frac{3}{4} = \frac{16-3}{4} = \frac{13}{4}$
$= 3\frac{1}{4}$

ferner $\frac{3}{4} - 4 = \frac{3}{4} - \frac{4}{1} = \frac{3}{4} - \frac{4.4}{1.4} = \frac{3}{4} - \frac{16}{4} = \frac{3-16}{4}$
$= -\frac{13}{4} = -3\frac{1}{4}$.

4) Sind die Brüche im Minuendo oder Subtrahendo, oder in beyden zugleich mit ganzen Zahlen verbunden, so macht man solche nach §. 135. zu unächten Brüchen, das übrige ist dem gezeigten gleich. Z. E.

$4\frac{4}{5} - 6\frac{3}{4} = \frac{24}{5} - \frac{27}{4} = \frac{24.4}{5.4} - \frac{27.5}{4.5} = \frac{96}{20} - \frac{135}{20}$
$= \frac{96-135}{20} = -\frac{39}{20} = -1\frac{19}{20}$.

ferner

ferner $a + \frac{b}{c} - b + \frac{m}{n} = \frac{ac+b}{c} - \frac{bn+m}{n}$

$= \frac{(ac+b)n-(bn+m)c}{cn} = \frac{(acn+bn)-(bnc+mc)}{cn}$

5) Bestehet der Minuendus oder Subtrahendus, oder beyde zugleich aus ganzen Zahlen, bey welchen Brüche mit dem Minuszeichen befindlich, so bringet man die einem jeden zugehörige Größen unter einerley Benennung, subtrahiret alsdenn die Brüche von der bey selbigen vorhandenen ganzen Zahl, und verfähret übrigens, wie gelehret. Es wäre also z. E.

$(6 - \frac{4}{5}) - (3 - \frac{4}{7}) = (\frac{6}{1} - \frac{4}{5}) - (\frac{3}{1} - \frac{4}{7})$

$= (\frac{6.5}{1.5} - \frac{4}{5}) - (\frac{3.7}{1.7} - \frac{4}{7}) = (\frac{30-4}{5}) - (\frac{21-4}{7})$

$= \frac{26}{5} - \frac{17}{7} = \frac{26.7}{5.7} - \frac{17.5}{7.5} = \frac{182-85}{35} = \frac{97}{35} = 2\frac{27}{35}$

ferner $(a - \frac{b}{c}) - (x - \frac{m}{n}) = (\frac{ac-b}{c}) - (\frac{nx-m}{n})$

$= \frac{(ac=b)n-(nx-m)c}{cn} = \frac{(acn-bn)-(nxc-mc)}{cn}$

$= \frac{acn-bn-nxc+mc}{cn} = \frac{acn+mc-bn-ncx}{cn}$

$= a-x+\frac{mc-bn}{cn}$.

§. 136. Sollen Brüche mit entgegengesetzten Zeichen von einander subtrahiret werden, so beobachtet man die §. 52. gegebene Regeln. Z. E. $(\frac{3}{4}) - (-\frac{4}{5})$ wäre $= \frac{3.5}{4.5} - (-\frac{4.4}{5.4}) = \frac{15}{20} - (-\frac{16}{20})$

$= \frac{15+16}{20} = \frac{31}{20} = 1\frac{11}{20}$

ferner $\frac{a}{b} - (-\frac{c}{x}) = \frac{ax}{bx} - (-\frac{cb}{bx}) = \frac{ax+cb}{bx}$.

§. 137. Ganze Reihen von Brüchen, in welchen die Zeichen abwechseln, in eine Größe zu bringen. Man addiret zuerst die Plus- und Minusgrößen besonders, ziehet alsdenn die kleine von der größern Größe ab, so giebt die Differenz die verlangte Größe. Z. E. $\frac{2}{3} - \frac{4}{5} + \frac{6}{7} - \frac{8}{9}$.

Die Plusgrößen sind $\frac{2}{3} + \frac{6}{7} = \frac{2.7}{3.7} + \frac{6.3}{7.3} = \frac{14+18}{21} = \frac{32}{21}$.

Die Minusgrößen sind $-\frac{4}{5} - \frac{8}{9} = -\frac{4.9}{5.9} - \frac{8.5}{9.5} = -\frac{36-40}{45} = -\frac{76}{45}$.

Die Plus- und Minusgrößen sind $\frac{32}{21} - \frac{76}{45} = \frac{32.45}{21.45} - \frac{76.21}{45.21} = \frac{1440-1596}{945} = -\frac{156}{945} = \frac{156:3}{945:3} = -\frac{52}{315}$.

Auch folgendes Subtractionsexempel wird uns nunmehro nicht schwer fallen. Z. E.

$(\frac{3}{4} + \frac{2}{3} - \frac{3}{8} - \frac{2}{5}) - (-\frac{1}{2} - \frac{6}{7} + 3 + 4)$.

In diesem Exempel bringet man sowohl den Minuendum als Subtrahendum zu einer Größe, ferner beyde unter eine Benennung, nachher subtrahiret man, wie gelehret.

Die Plusgrößen des Minuendi sind hier $\frac{3}{4} + \frac{2}{3} = \frac{9+8}{12} = \frac{17}{12}$.

Die Minusgrößen des Minuendi sind hier $-\frac{3}{8} - \frac{2}{5} = -\frac{15-16}{40} = -\frac{31}{40}$.

Die Summa des Minuendi ist also $\frac{17}{12} - \frac{31}{40} = \frac{680-372}{480} = \frac{308}{480} = \frac{308:4}{480:4} = \frac{77}{120}$.

Im Subtrahendo sind die Plusgrößen $3 + 4 = 7$.

Im Subtrahendo sind die Minusgrößen $-\frac{1}{2} - \frac{6}{7} = -\frac{7-12}{14} = -\frac{19}{14}$.

Die

Die Summa des Subtrahendi ist also $7 - \frac{19}{14}$ $= \frac{7.14}{1.14} - \frac{19}{14} = \frac{98-19}{14} = \frac{79}{14}$.

Und die gesuchte Differenz von obigem Exempel wird also $= \frac{77}{120} - \frac{79}{14} = \frac{77.14}{120.14} - \frac{79.120}{14.120}$ $= \frac{1078-9480}{1680} = -\frac{8402}{1680} = -5\frac{2}{1680} = -5\frac{1}{840}$

§. 138. Die Probe der Subtraction geschiehet auch hier durch die Addition des Subtrahendi und der Differenz, und muß deren Summa = seyn dem Minuendo. Da nun $\frac{3}{4} - \frac{4}{5} = \frac{3.5}{4.5} - \frac{4.4}{5.4}$ $= \frac{15-16}{20} = -\frac{1}{20}$

so muß also $-\frac{1}{20} + \frac{4}{5} = -\frac{1}{20} + \frac{4.4}{5.4} = -\frac{1+16}{20}$ $= \frac{15}{20} = \frac{15:5}{20:5} = \frac{3}{4}$ seyn.

§. 139. Aechte und unächte Brüche können mit einer ganzen Zahl, auch mit ächten oder unächten Brüchen multipliciret werden. Aus dem Verfahren,

1) einen Bruch mit einer ganzen Zahl,

2) einen Bruch mit einem Bruch zu multipliciren, wollen wir eine allgemeine Regel, welche bey allen möglichen Vorfällen zu gebrauchen, geben, und selbige beweisen.

Der erste Fall.

$\frac{3}{4}$ soll mit 4 multipliciret werden.

Die Multiplication ist nach §. 57. eine künstliche Addition; es würde also hiernach $\frac{3}{4} \cdot 3 = \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4}$ $= \frac{3+3+3}{4} = \frac{9}{4}$.

Ein gleiches Product erhalten wir durch die Multiplication des Zählers 3 mit der gegebenen ganzen Zahl 3.

Die Multiplication aller Brüche mit einer ganzen Zahl bestehet also allein in der Multiplication des Zählers mit der ganzen Zahl und unter das Product gesetzten Nenner.

Auch dieses gilt von unächten Brüchen, imgleichen wenn der gegebene Bruch sowohl, wie die ganze Größe durch Buchstaben angezeiget ist. Es wäre also

$$\frac{3}{4} \cdot 3 = \frac{9}{4} \text{ und } \frac{a}{b} \cdot m = \frac{am}{b}.$$

Der zweyte Fall.

Beyde Factores sind Brüche. Z. E. $\frac{3}{4}$ soll mit $\frac{4}{5}$ multipliciret werden.

Multiplicirten wir hier allein den Zähler des Bruchs $\frac{3}{4}$ mit 4, so würde das Product $\frac{3 \cdot 4}{4} = \frac{12}{4}$ zu groß, weil der Multiplicandus $\frac{3}{4}$ nicht mit 4, sondern mit $\frac{4}{5} = 4 : 5$ vermehret werden soll. Da nun das Product $\frac{12}{4}$ so vielmal zu groß, als der Nenner 5 des Multiplicators anzeiget, so muß das Product $\frac{12}{4}$ noch durch 5 dividiret werden. Dieses geschiehet aber, wenn die beyden Nenner mit einander multipliciret werden, weil alsdenn der Divisor des neuen Bruchs 5 mal so groß wird als des vorigen. Brüche mit Brüchen zu multipliciren, bestehet also in der Vermehrung des Zählers mit Zähler und Nenners mit Nenner; es ist also

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} = \frac{3 \cdot 4}{4,5} = \frac{12}{20} \text{ und } \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

Weil nun eine jede ganze Zahl als ein Bruch, dessen

dessen Nenner = 1, betrachtet werden kann, so gilt auf alle Fälle bey der Multiplication der Brüche diese allgemeine Regel.

Man multipliciret Zähler mit Zähler, und Nenner mit Nenner.

§. 140. Das Product einer jeden Größe, deren einer Factor ein ächter Bruch, ist allemal kleiner als einer der Factoren, weil ein ächter Bruch kleiner als 1 ist, also die zu multiplicirende Größe nicht einmal, sondern weniger als einmal genommen wird. So ist z. E. $\frac{4}{5} \cdot \frac{8}{9} = \frac{32}{45}$ kleiner als einer der beyden Brüche.

Sind hingegen beyde Factoren unächte Brüche, so wird das Product allemal größer, als einer derer Factoren ist, weil ein unächter Bruch größer als 1 ist.

§. 141. Wenn man einen Bruch mit sich selbst multipliciret, so erhebt man selbigen zur Potenz. Man muß aber alsdenn den Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multipliciren. Die Benennung der Potenzen bleibet, wie sie §. 74. gelehret. Z. E. $\frac{3}{4}$ zur zweyten Potenz ist $= \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 3}{4 \cdot 4} = \frac{9}{16}$ und $\frac{a}{b}$ zur dritten Potenz erhoben $= \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a \cdot a \cdot a}{b \cdot b \cdot b} = \frac{a^3}{b^3}$.

Sollen Brüche, welche aus zusammengesetzten Größen bestehen, zu einer Potenz erhoben werden, so wird ebenfalls der Zähler sowohl als der Nenner so vielmal mit sich selbst multipliciret, als

die Größe der Potenz es erfordert. Will man aber diese Erhebung nur anzeigen, so schließet man den gegebenen Bruch in Klammern, und setzet oben an selbige den Exponenten der verlangten Potenz. So wäre z. E.

$$\left(\frac{abx}{mnc}\right)^3 = \frac{abx.abx.abx}{mnc.mnc.mnc} = \frac{aaabbbxxx}{mmmnnnccc}$$

$$= \frac{a^3b^3x^3}{m^3n^3c^3} \text{ und } \left(\frac{a-x}{b+c}\right)^2 = \left(\frac{a-x}{b+c}\right).\left(\frac{a-x}{b+c}\right)$$

$$= \frac{a^2-2ax+x^2}{b^2+2bc+c^2}.$$

Je größer die Potenz ist, zu welcher ein ächter Bruch erhoben, desto kleiner wird das Product, und bleibt immer Bruch, weil es immer mit einer kleinern Größe als 1 multipliciret wird. Setzte man diese Erhebung zur Potenz ohne Aufhören fort, so würde zuletzt das Product einer unendlich kleinen Größe gleich werden. Hieraus folget auch, daß die Wurzel eines zur Potenz erhobenen Bruchs ein Bruch seyn müsse.

§. 142. Bey der Division der Brüche, durch welche wir gleichfalls wie bey ganzen Zahlen untersuchen, wie vielmal der Divisor im Dividendo enthalten, haben wir folgende Fälle zu betrachten.

1) Der Divisor sey eine ganze Zahl, der Dividendus ein ächter oder unächter Bruch.

2) Der Divisor sey ein ächter oder unächter Bruch, der Dividendus eine ganze Zahl.

3) Der Divisor und Dividendus sind beyde ächte oder unächte Brüche.

4) Der Divisor sey ein ächter und der Dividendus ein unächter, oder jener ein unächter und dieser ein ächter Bruch.

Erster Fall.

Der Dividendus sey $= \frac{4}{5}$ und der Divisor $= 2$, also $\frac{4}{5} : 2$. Hier ist die Division sehr leicht, denn man hat nur nöthig den Zähler 4 durch den Divisor 2 zu theilen, es würde also

$$\frac{4}{5} ; 2 = \frac{4:2}{5} = \frac{2}{5}.$$

Der Beweiß hievon ist sehr deutlich, denn $\frac{4}{5}$ ist entstanden aus $\frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5}$; da nun die Subtraction eine der Addition entgegengesetzte Handlung, und die Division eine kurze Subtraction ist, so wird

$$\frac{4}{5} : 2 = \frac{4}{5} - \frac{2}{5} = \frac{4-2}{5} = \frac{2}{5}.$$

Wenn aber der Zähler des Dividendi nicht theilbar ist, so verwandelt man den gegebenen Bruch durch die Multiplication des Zählers und Nenners mit einer Zahl in einen solchen Bruch, welcher sich durch den gegebenen Divisor theilen lässet; hiezu ist der Divisor selbst die bequemste Zahl, und hiedurch wird nach §. 112. der Bruch im mindesten nicht geändert, es würde also z. E.

$$\frac{3}{4} : 2 = \frac{3.2:2}{4.2}$$

Dividiret man nun den Zähler 3.2 durch 2, so fällt die 2 im Zähler weg, im Nenner bleibt aber selbige; es wäre also

$$\frac{3}{4} : 2 = \frac{3.2:2}{4.2} = \frac{3}{4.2} = \frac{3}{8}.$$

Auch dieses gilt von Buchstaben, also

$$\frac{a}{b} : m = \frac{am : m}{bm} = \frac{a}{bm}.$$

Zweyter Fall.

Der Dividendus sey eine ganze Zahl, der Divisor ein Bruch. Z. E. $6 : \frac{3}{4}$.

Da jede ganze Zahl als ein Bruch, dessen Nenner $= 1$, betrachtet werden kann, folglich $6 : \frac{3}{4} = \frac{6}{1} : \frac{3}{4}$, und §. 127. gelehret, Brüche unter einerley Benennung zu bringen, so wird

$$\frac{6}{1} : \frac{3}{4} = \frac{6.4}{1.4} : \frac{3.1}{4.1} = \frac{24}{4} : \frac{3}{4}.$$

Beyde Brüche haben nun einerley Nenner. Es können also beyde Zähler als ganze Zahlen angesehen, und der Zähler des Dividendi durch den Zähler des Divisors getheilet werden. Es wäre also $\frac{24}{4} : \frac{3}{4} = \frac{24}{3} = 8$.

Dritter Fall.

Der Dividendus und Divisor sind beyde ächte Brüche. Z. E. $\frac{3}{4} : \frac{2}{5}$

oder der Dividendus und Divisor sind beyde unächte Brüche. Z. E. $\frac{8}{3} : \frac{6}{5}$.

Bey beyden Fällen gilt die gegebene Regel, daß man die Brüche unter einerley Benennung bringet, alsdenn den Zähler des Dividendi durch den Zähler des Divisors theilet. Es ist also

$$\frac{3}{4} : \frac{2}{5} = \frac{3.5}{4.5} : \frac{2.4}{5.4} = \frac{15}{20} : \frac{8}{20} = 15 : 8 = \frac{15}{8} = 1\frac{7}{8}$$

und $\frac{8}{3} : \frac{6}{5} = \frac{8.5}{3.5} : \frac{6.3}{5.3} = \frac{40}{15} : \frac{18}{15} = 40 : 18 = \frac{40}{18} = 2\frac{4}{18} = 2\frac{2}{9}$.

Vierter Fall.

Der Divisor sey ein ächter Bruch, der Dividendus ein unächter Bruch. Z. E. $\frac{8}{5} : \frac{3}{4}$
oder der Divisor sey ein unächter Bruch, und der Dividendus ein ächter Bruch. Z. E. $\frac{4}{7} : \frac{8}{3}$
Auch hier ist das Verfahren dem bisher gezeigten gleich, mithin ist

$\frac{8}{5} : \frac{3}{4} = \frac{8.4}{5.4} : \frac{3.5}{4.5} = \frac{32}{20} : \frac{15}{20} = 32 : 15 = \frac{32}{15} = 2\frac{2}{15}$

und $\frac{4}{7} : \frac{8}{3} = \frac{4.3}{7.3} : \frac{8.7}{3.7} = \frac{12}{21} : \frac{56}{21} = 12 : 56 = \frac{12}{56}$

$= \frac{12:4}{56:4} = \frac{3}{14}$.

§. 143. Da durch Buchstaben alle mögliche Größen vorgestellet werden können, so können die Brüche $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ sowohl ächte als unächte Brüche bedeuten.

Auch hier findet bey der Division die gegebene Regel statt; es wäre also

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} : \frac{cb}{bd} = ad : cb = \frac{ad}{cb}.$$

Betrachten wir dieses Exempel genau, so finden wir, daß der nemliche Quotient $\frac{ad}{cb}$ entstanden, wenn wir den Divisor $\frac{c}{d}$ umgekehret, den Zähler c an die Stelle des Nenners d gesetzet, uud alsdenn die Division in eine Multiplication des Zählers mit Zähler, und Nenners mit Nenner verwandelt hätten, es wäre also

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}.$$

Hier-

Hieraus folget die allgemeine Regel, welche auf alle Divisionsexempel in Brüchen passet.

Man kehret den Divisor um, und verwandelt die Division in eine Multiplication des nunmehrigen Zählers mit Zähler, und Nenners mit Nenner.

§. 144. Auch jetzt gegebene allgemeine Regel gilt, wenn entweder sowohl der Dividendus als Divisor, oder einer von beyden aus einer ganzen Zahl nebst angehängtem Bruch bestehet. Man muß alsdenn zuvörderst die ganzen Zahlen nebst angehängtem Bruch in einen Bruch verwandeln. Beygesetzte Exempel werden ohne beygefügte Erklärung dieses Verfahren deutlich zeigen. R. E.

$$4\frac{3}{4} : 2\frac{4}{5} = \frac{19}{4} : \frac{14}{5} = \frac{19}{4} \cdot \frac{5}{14} = \frac{95}{56} = 1\frac{39}{56}$$

und

$$a\frac{b}{c} : m\frac{n}{x} = \left(\frac{ac+b}{c}\right) : \left(\frac{mx+n}{x}\right) = \left(\frac{ac+b}{c}\right) \cdot \left(\frac{x}{mx+n}\right)$$

$$= \frac{(ac+b)x}{(mx+n)c} = \frac{acx+bx}{mxc+nc}.$$

§. 145. Was bey der Division mit ganzen Zahlen in Absicht der Zeichen Plus und Minus gelehret, gilt auch hier bey den Brüchen. Es ist also

$$\frac{3}{4} : -\frac{2}{3} = \frac{3}{4} \cdot -\frac{3}{2} = -\frac{9}{8} = -1\frac{1}{8}$$

und $-\frac{1}{2} : -\frac{3}{7} = -\frac{1}{2} \cdot -\frac{7}{3} = \frac{7}{6} = 1\frac{1}{6}$.

§. 146. Man findet auch oftermals Brüche, welche auf folgende Art angezeiget werden. $\frac{\frac{3}{4}}{\frac{4}{7}}$ oder $\frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{4} : \frac{4}{7}}$

wovon

wovon ersterer $\frac{\frac{3}{4}}{\frac{4}{7}} = \frac{3}{4} : \frac{4}{7}$ und

letzterer $\frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{4} : \frac{4}{7}} = \frac{4}{5} : (\frac{3}{4} : \frac{4}{7}) = \frac{4}{5} : (\frac{3}{4} \cdot \frac{7}{4}) = \frac{4}{5} : \frac{21}{16}$

$= \frac{4}{5} \cdot \frac{16}{21} = \frac{64}{105}$.

§. 147. Die Probe der Division geschiehet auch hier durch die Multiplication; desgleichen die Probe der Multiplication durch die Division. Bey beyden gelten die bey ganzen Zahlen gegebene Regeln. Da also

$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$; so ist $\frac{ad}{bc} \cdot \frac{c}{d} = \frac{adc}{bcd} = \frac{a}{b}$

ferner da

$\frac{a}{b} \cdot \frac{m}{n} = \frac{am}{bn}$; so ist $\frac{am}{bn} : \frac{m}{n} = \frac{am}{bn} \cdot \frac{n}{m} = \frac{amn}{bnm} = \frac{a}{b}$.

§. 148. Brüche in benamten Zahlen werden in allen vier Rechnungsarten auch auf jetzt gezeigte Art behandelt. Da es aber oft nicht nur nöthig, sondern auch sehr nützlich ist, die erhaltene Summa, Differenz, Product oder Quotienten im Werth einer niedrigern Benennung auszudrücken, welches man Brüche reduciren nennet, so wollen wir zuerst dieses Verfahren lehren, und demnächst nur von jeder Rechnungsart ein Beyspiel anführen.

§. 149. Die Reduction benamter Brüche erfordert eine Kenntniß des Gesetzes, nach welchem die Einheiten steigen. Ist diese Zahl bekannt, aus welcher eine Einheit der nächst höhern

Be-

Benennung einer Größe bestehet, so wird mit selbiger der Zähler des Bruchs, welcher in geringerer Benennung ausgedrückt werden soll, multipliciret, das hierdurch erhaltene Product durch den Nenner dividiret, und dem Quotienten gibt man alsdenn den Namen der geringern Benennung. Z. E. $\frac{3}{4}$ Thaler sollen zu Mariengroschen reduciret werden. Weil bekannt, daß 1 Thaler = 36 mgr. so wird

$\frac{3}{4}$ Thlr. = $^{3\cdot 36}_{4}$ mgr. = $^{108}_{4}$ mgr. = 27 mgr. seyn.

§. 150. Beobachten wir sämtliche, bisher von den Brüchen gegebene Regeln, so werden wir auch im Stande seyn, folgenden Aufgaben ein Genüge zu leisten, und die hier nur berechnete Exempel ohne zugefügte Erklärung verstehen.

1. Benamte Brüche zu addiren.

$2\frac{3}{4}$ Thlr.	$21\frac{2}{3}$ mgr.	$4\frac{1}{5}$ pf.
$2\frac{3}{8}$ "	$13\frac{1}{2}$ "	$6\frac{1}{10}$ "
$7\frac{1}{6}$ "	$6\frac{6}{7}$ "	$5\frac{8}{9}$ "

$11\frac{248}{192}$ Thlr. $40\frac{85}{42}$ mgr. $15\frac{535}{60}$ pf.

Y Z Y

$12_{1}\frac{56}{92}$ Thlr. $42_{4}\frac{1}{2}$ mgr. $16\frac{855}{450}$ pf.

$12\frac{7}{2}\frac{1}{4}$ Thlr. $42\frac{1}{4}\frac{1}{2}$ mgr. $16\frac{17}{90}$ pf.

Z

$12\frac{7}{2}\frac{1}{4}$ Thlr. $44\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ mgr. $\frac{17}{90}$ pf.

Y

$13\frac{7}{2}\frac{1}{4}$ Thlr. $8\frac{1}{4}\frac{1}{2}$ mgr. $\frac{17}{90}$ pf.

10 4

13 Thlr.

13 Thlr. $18\frac{1}{4}\frac{1}{2}$ mgr. $4\frac{1}{9}\frac{7}{0}$ pf.

13 Thlr. 18 mgr. $4\frac{7}{1}\frac{1}{8}\frac{7}{9}\frac{7}{0}$ pf.

13 Thlr. 18 mgr. $4\frac{2}{6}\frac{3}{3}\frac{9}{0}$ pf.

2. Benamte Brüche zu subtrahiren.

$3\frac{4}{5}$ Thlr. $4\frac{2}{3}$ mgr. $6\frac{1}{2}$ pf.

$2\frac{1}{6}$ " $3\frac{1}{8}$ " $4\frac{1}{4}$ "

$\frac{19}{5} - \frac{13}{6}$ Thlr. $\frac{14}{3} - \frac{25}{8}$ mgr. $\frac{13}{2} - \frac{17}{4}$ pf.

$\frac{114-65}{30}$ Thlr. $\frac{112-75}{24}$ mgr. $\frac{26-17}{4}$ pf.

$\frac{49}{30}$ Thlr. $\frac{37}{24}$ mgr. $\frac{9}{4}$ pf.

$1\frac{19}{30}$ Thlr. $1\frac{13}{24}$ mgr. $2\frac{1}{4}$ pf.

1 Thlr. $24\frac{41}{20}$ mgr. $2\frac{1}{4}$ pf.

1 Thlr. 24 mgr. $4\frac{59}{60}$ pf.

3. Benamte Brüche zu multipliciren.

$(3\frac{3}{4}$ Thlr. + $4\frac{2}{5}$ mgr. + $6\frac{2}{3}$ pf.) . 6

$(\frac{15}{3}$ Thlr. + $\frac{22}{5}$ mgr. + $\frac{20}{3}$ pf.) . 6

$\frac{90}{3}$ Thlr. + $\frac{132}{5}$ mgr. + $\frac{120}{3}$ pf.

30 Thlr. + $26\frac{2}{5}$ mgr. + 40 pf.

30 Thlr. + $31\frac{2}{5}$ mgr. ——

30 Thlr. + 31 mgr. + $3\frac{1}{5}$ pf.

4. Benamte Brüche zu dividiren.

$(4\frac{2}{3}$ Thlr. + $8\frac{2}{5}$ mgr. + $4\frac{3}{5}$ pf.) : 8

$(\frac{14}{3}$ Thlr. + $\frac{42}{5}$ mgr. + $\frac{23}{5}$ pf.) : 8

$\frac{14}{3.8}$ Thlr. + $\frac{42}{5.8}$ mgr. + $\frac{23}{5.8}$ pf.

$\frac{1}{3}\frac{4}{4}$ Thlr.

$$\frac{1}{2}\frac{4}{4}\text{ Thlr.} + \frac{4}{4}\frac{2}{0}\text{ mgr.} + \frac{2}{4}\frac{3}{0}\text{ pf.}$$

$$\frac{1}{1}\frac{7}{2}\text{ Thlr.} + \frac{2}{2}\frac{1}{0}\text{ mgr.} + \frac{2}{4}\frac{3}{0}\text{ pf.}$$

$$\frac{1}{1}\frac{7}{2}\text{ Thlr.} + 1\frac{1}{2}\frac{}{0}\text{ mgr.} + \frac{2}{4}\frac{3}{0}\text{ pf.}$$

$$\text{, Thlr.} + 22\text{ mgr.} + \frac{3}{4}\frac{2}{0}\text{ pf.}$$

§. 151. Ein jeder Bruch kann durch eine unendliche Reihe von Gliedern ausgedrückt werden, deren Ende nie gefunden wird. Ohnerachtet man sich hier der Wahrheit nur nähert, so hat dennoch diese Vorstellung eines Bruchs durch eine unendliche Reihe einen großen Nutzen.

Eine jede Zahl, welche größer als 1, kann entweder als die Summa oder die Differenz zwoer Größen betrachtet werden; es sind also folgende Ausdrücke einander völlig gleich. Z. E.

$$4 = 3 + 1 = 5 - 1 \text{ u. s. w.}$$

Will man nun einen Bruch durch eine unendliche Reihe von Gliedern vorstellen, so verwandelt man den Nenner des Bruchs in eine Größe, welche aus zwey Theilen bestehet, die entweder durch die Addition oder Subtraction entstanden. So wäre z. E. $\frac{3}{4} = \frac{3}{3+1}$ oder $\frac{3}{4} = \frac{3}{5-1}$

Dividiret man wirklich, so erhält man den Quotienten in einer unendlichen Reihe, und zwar bey $\frac{3}{3+1}$ eine Reihe, in welcher die Glieder mit Plus und Minus abwechseln; hingegen bey $\frac{3}{5-1}$ eine Reihe von Plusgrößen. Addiren wir alsdenn auf beyde Fälle die erhaltenen Glieder des Quotienten, so wird deren Summa, wenn die Division oft fortgesetzet, beynahe gleich dem gegebenen Bruch seyn.

Wir

Wir wollen einen Bruch in Buchstaben nehmen und $\frac{a}{b+c}$ dividiren; also

$$b+c \quad a \;\Big|\; \frac{a}{b} - \frac{ac}{b^2} + \frac{ac^2}{b^3} - \frac{ac^3}{b^4} + \frac{ac^4}{b^5} \cdots\cdots$$

$$a + \frac{ac}{b}$$

$$- \quad -$$

$$- \frac{ac}{b} \quad + \frac{ac^2}{b^2}$$

$$- \frac{ac}{b} \quad - \frac{ac^2}{b^2}$$

$$+ \quad +$$

$$\frac{ac^2}{b^2} + \frac{ac^3}{b^3}$$

$$- \quad -$$

$$- \frac{ac^3}{b^3} \quad + \frac{ac^4}{b^4}$$

$$- \frac{ac^3}{b^3} \quad - \frac{ac^4}{b^4}$$

$$+ \quad +$$

$$\frac{ac^4}{b^4} + \frac{ac^5}{b^5}.$$

Würden wir $\frac{a}{b-c}$ dividiren, so erhielten wir ebenfalls

falls diese nemlichen Glieder zum Quotienten, jedoch mit dem Unterschied, daß selbige alle aus Plusgrößen bestünden.

Wir wollen gegenwärtiges Exempel in Zahlen verwandeln, um dadurch zu zeigen, wie weit wir uns dem gegebenen Bruch genähert.

Es sey
$a=1$; $b=3$; $c=2$; also ist $\frac{a}{b+c}=\frac{1}{3+2}=\frac{1}{5}$

und der Quotient $\frac{a}{b}-\frac{ac}{b^2}+\frac{ac^2}{b^3}-\frac{ac^3}{b^4}+\frac{ac^4}{b^5}$,

würde gleich seyn $\frac{1}{3}-\frac{1.2}{3^2}+\frac{1.2^2}{3^3}-\frac{1.2^3}{3^4}+\frac{1.2^4}{3^5}$

oder die Potenzen wirklich ausgedrükt $\frac{1}{3}-\frac{2}{9}+\frac{4}{27}-\frac{8}{81}+\frac{16}{243}$.

Die Summa sämtlicher Plusgrößen wäre

$$\frac{1}{3}+\frac{4}{27}+\frac{16}{243}=\frac{81+36+16}{243}=\frac{133}{243}.$$

Die Summa sämtlicher Minusgrößen wäre

$$-\frac{2}{9}-\frac{8}{81}=-\frac{18-8}{81}=-\frac{26}{81}.$$

Die Summa aller Glieder wäre

$$\frac{133}{243}-\frac{26}{81}=\frac{133-78}{243}=\frac{55}{243}.$$

Vergleichen wir diesen erhaltenen Bruch $\frac{55}{243}$ mit $\frac{1}{5}$, so werden wir finden, daß ersterer um $\frac{32}{1215}$ größer als letzterer. Hätten wir aber die Division weiter fortgesetzet, so würde die Differenz noch weit geringer seyn. §. 152.

§. 152. Zum Beschluß der Lehre von den Brüchen wollen wir das §. 110. geleistete Versprechen erfüllen, und auch zeigen, wie gleichnamigte Potenzen, deren Exponenten Brüche sind, addiret, subtrahiret, multipliciret und dividiret werden.

Wird auch hier der Zähler und Nenner des Bruchs eines Potenzexponenten mit einerley Zahl multipliciret oder dividiret, so bleibt dennoch die Größe ungeändert; so ist z. E.

$$\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1.3}{2.3}} = a^{\frac{3}{6}} = \sqrt[6]{a^3}$$

und $\sqrt[4]{a^6} = a^{\frac{6}{4}} = a^{\frac{6:2}{4:2}} = a^{\frac{3}{2}} = \sqrt{a^3}$ u. s. w.

Da es auch oft vorzüglich in Gleichungen, wie wir in der Folge sehen werden, großen Vortheil schaffet, daß der Exponent einer Potenz durch untergesetzte 1 in einen Bruch verwandelt wird, so gilt auch hier erst gegebene Regel. Es wird also

z. E. $a^3 = a^{\frac{3}{1}} = a^{\frac{3.2}{1.2}} = a^{\frac{6}{2}} = \sqrt{a^6}$ und

$$a^{m-1} = a^{\frac{m-1}{1}} = a^{\frac{m-1.n}{1.n}} = a^{\frac{(m-1)n}{1.n}} = a^{\frac{mn-n}{n}} = \sqrt[n]{a^{mn-n}}$$

$$a^{m-1} = a^{\frac{m-1}{1}} = a^{\frac{m-1:n}{1:n}} = a^{\frac{m-1:n}{n}} = a^{\frac{m-1}{n.n}} = a^{\frac{m-1}{n^2}} = \sqrt[n^2]{a^{m-1}}.$$

§. 153. Die Addition und Subtraction dieser Bruchexponenten der Potenzen ist in so weit gleich der bey Brüchen gezeigten Art, daß solche, wenn sie ungleich, unter einerley Benennung gebracht werden; allein man addiret und subtrahiret selbige nicht wirklich, sondern man setzet nur zwi-

schen die Potenzen das + oder — Zeichen. So wäre z. E.

$$\sqrt{a} + \sqrt[3]{a^2} = a^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{1.3}{2.3}} + a^{\frac{2.2}{3.2}} = a^{\frac{3}{6}} + a^{\frac{4}{6}} = \sqrt[6]{a^3} + \sqrt[6]{a^4},$$

ferner

$$\sqrt[3]{a^2} - \sqrt{a} = a^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{2.2}{3.2}} - a^{\frac{1.3}{2.3}} = a^{\frac{4}{6}} - a^{\frac{3}{6}} = \sqrt[6]{a^4} - \sqrt[6]{a^3}.$$

Da auch nach §. 106.

$\frac{1}{x} = x^{-1}$, so würde $\sqrt{\frac{1}{x}} + \sqrt[3]{\frac{1}{x^4}} = \sqrt{x^{-1}} + \sqrt[3]{x^{-4}}$

$$= x^{-\frac{1}{2}} + x^{-\frac{4}{3}} = x^{-\frac{1.3}{2.3}} + x^{-\frac{4.2}{3.2}} = x^{-\frac{3}{6}} + x^{-\frac{8}{6}}$$

$$= \sqrt[6]{x^{-3}} + \sqrt[6]{x^{-8}} = \sqrt[6]{\frac{1}{x}} + \sqrt[6]{\frac{1}{x^8}} = \frac{1}{\sqrt[6]{x^3}} + \frac{1}{\sqrt[6]{x^8}}$$

u. s. w.

§. 154. Die Multiplication gleichnamigter Potenzen, deren Exponenten Brüche sind, bestehet in der Addition der Zähler der Bruchexponenten, wenn nemlich die Nenner derselben gleichnamigt; sind selbige solches nicht, so bringet man sie zuerst unter einen Namen. Z. E.

$$\sqrt{a^4} \cdot \sqrt[3]{a^2} = a^{\frac{4}{2}} \cdot a^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{4.3}{2.3}} \cdot a^{\frac{2.2}{3.2}} = a^{\frac{12}{6}} \cdot a^{\frac{4}{6}}$$

$$= a^{\frac{12+4}{6}} = a^{\frac{16}{6}} = a^{\frac{16:2}{6:2}} = a^{\frac{8}{3}} = \sqrt[3]{a^8}$$

ferner

$$x^{\frac{m}{n}} \cdot x^{\frac{n}{r}} = x^{\frac{m}{1}} \cdot x^{\frac{n}{r}} = x^{\frac{m.r}{1.r}} \cdot x^{\frac{n.1}{r.1}} = x^{\frac{mr}{r}} \cdot x^{\frac{n}{r}} = x^{\frac{mr+n}{r}}$$

$$= \sqrt[r]{x^{mr+n}} \text{ und}$$

$$a^{-\frac{1}{2}} \cdot a^{-\frac{3}{4}} = a^{-\frac{1.2}{2.2}} \cdot a^{-\frac{3}{4}} = a^{-\frac{2}{4}} \cdot a^{-\frac{3}{4}} = a^{-\frac{2-3}{4}} = a^{-\frac{5}{4}}$$

$$= \frac{1}{a^{\frac{5}{4}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{a^5}} = \frac{1}{\sqrt[4]{a^5}}.$$

ferner

ferner $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a^3} = a^{-\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{3}{2}} = a^{-\frac{1+3}{2}} = a^{\frac{2}{2}} = a^1 = a$.

§. 155. Die Division gleichnamigter Potenzen, deren Exponenten Brüche, bestehet hingegen in der Subtraction des Zählers des Subtrahendi von dem Zähler des Minuendi. Es wird aber auch hier erfordert, daß beyde Nenner gleichnamigt; ist dieses nicht, so werden selbige zuförderst unter einerley Benennung gebracht. Z. E.

$a^{\frac{4}{5}} : a^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{4.3}{5.3}} : a^{\frac{2.5}{3.5}} = a^{\frac{12}{15}} : a^{\frac{10}{15}} = a^{\frac{12-10}{15}} = a^{\frac{2}{15}} = \sqrt[15]{a^2}$.

ferner $a^{-4} : a^{-\frac{3}{4}} = a^{-\frac{4}{1}} : a^{-\frac{3}{4}} = a^{-\frac{4.4}{1.4}} : a^{-\frac{3}{4}} = a^{-\frac{16}{4}} : a^{-\frac{3}{4}}$

$= a^{-\frac{16-(-3)}{4}} = a^{-\frac{13}{4}} = \sqrt[4]{a^{-13}} = \sqrt[4]{a^{\frac{1}{13}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{a^{13}}}$.

ferner $a^{\frac{3}{4}} : a^{-\frac{2}{5}} = a^{\frac{3}{4}} : a^{-\frac{1.2}{2.2}} = a^{\frac{3}{4}} : a^{-\frac{2}{4}} = a^{\frac{3-2}{4}}$

$= a^{\frac{5}{4}} = \sqrt[4]{a^5}$.

ferner $a^{-\frac{4}{5}} : a^{\frac{3}{2}} = a^{-\frac{4.2}{5.2}} : a^{\frac{3.5}{2.5}} = a^{-\frac{8}{10} \cdot \frac{15}{10}} = a^{-\frac{8}{10}-\frac{15}{10}}$

$= a^{-\frac{8-(15)}{10}} = a^{\frac{7}{10}} = \sqrt[10]{a^7}$.

§. 156. Es gelten auch hier sowohl bey der Multiplication als Division die schon so oft erwähnte Regeln in Absicht der Zeichen Plus und Minus. Es würde also

$a^{\frac{3}{4}} \cdot -a^{\frac{4}{3}} = a^{\frac{3.3}{4.3}} \cdot -a^{\frac{4.4}{3.4}} = a^{\frac{9}{12}} \cdot -a^{\frac{16}{12}} = -a^{\frac{9+16}{12}}$

$= -a^{\frac{25}{12}} = -\sqrt[12]{a^{25}}$.

ferner

$x^{\frac{1}{2}} : -x^{\frac{2}{3}} = x^{\frac{1.3}{2.3}} : -x^{\frac{2.2}{3.2}} = x^{\frac{3}{6}} : -x^{\frac{4}{6}} = -x^{\frac{3-4}{6}}$

$= -x^{-\frac{1}{6}} = -\sqrt[6]{x^{-1}} = -\sqrt[6]{\frac{1}{x}} = -\frac{1}{\sqrt[6]{x}}$.

§. 157. Potenzen, deren Exponenten Brüche sind, werden zu höhern Dignitäten erhoben, wenn man den Zähler der Bruchpotenz mit der Zahl, welche die verlangte Dignität anzeiget, multipliciret. Z. E.

$a^{\frac{3}{4}}$ soll zur dritten Potenz erhoben werden; es ist also

$$a^{\frac{3.3}{4}} = a^{\frac{9}{4}} = \sqrt[4]{a^9}$$

ferner $x^{-\frac{2}{3}}$ zur zweyten Potenz erhoben, wäre

$$x^{-\frac{2.2}{3}} = x^{-\frac{4}{3}} = \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}.$$

§. 158. Aus Potenzen, deren Exponenten Brüche, kann auch eine jede Wurzel, welche verlangt wird, gezogen werden. Solches geschiehet durch die Division ihrer Exponenten durch die Zahl, welche den verlangten Radix oder Wurzel anzeiget. Da nun in der Division bey den Brüchen gezeiget, daß der Divisor verkehret, und alsdenn die Division in eine Multiplication verwandelt wird, so haben wir auch hier nur nöthig, den Nenner mit der gegebenen Zahl, welche die verlangte Wurzel anzeiget, zu multipliciren. Es würde also die vierfache Wurzel aus

$$x^{\frac{2}{3}} = x^{\frac{2:4}{3}} = x^{\frac{2.4}{3.1}} = x^{\frac{2}{3.4}} = x^{\frac{2}{12}} = x^{\frac{2:2}{12:2}}$$

$$x^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{x}.$$

Daß nun $x^{\frac{1}{6}}$ die verlangte vierfache Wurzel von $x^{\frac{2}{3}}$ sey, erhellet daraus, weil $x^{\frac{2}{3}}$ durch die viermalige Multiplication $x^{\frac{2}{12}}$ entstanden. Es ist also

$x^{\frac{2}{3}}$

$x^{\frac{2}{3}} = x^{\frac{2}{12}} + x^{\frac{2}{12}} + x^{\frac{2}{12}} + x^{\frac{2}{12}} = x^{\frac{2+2+2+2}{12}}$

$= x^{\frac{8}{12}} = x^{\frac{8:4}{12:4}} = x^{\frac{2}{3}}.$

ferner $\sqrt[3]{a^{\frac{m+n}{r}}}$ wäre $= x^{\frac{m+n:3}{r}} = a^{\frac{m+n}{r}:\frac{3}{1}} = a^{\frac{m+n}{r}.\frac{1}{3}}$

$= a^{\frac{m+n}{3r}} = \sqrt[3r]{a^{m+n}}.$

und $\sqrt[x+y]{a^{\frac{m}{n}}} = a^{\frac{m:x+y}{n}} = a^{\frac{m}{n}:\frac{x+y}{1}} = a^{\frac{m}{n}.\frac{1}{x+y}} = a^{\frac{m}{n.(x+y)}}$

$= a^{\frac{m}{nx+yn}} = \sqrt[nx+yn]{a^m}.$

In einem besondern Kapitel, welches denen Wurzelgrößen gewidmet, werden wir von allem jetzt Gezeigten weitläuftiger handeln.

Das achte Kapitel.

Von den Decimalbrüchen.

§. 159. Aus der Lehre der Numeration wird noch erinnerlich seyn, daß eine jede der 9 Zahlzeichen, je weiter selbige von der rechten gegen die linke Hand gerücket wurde, einen zehnfachen größern Werth erhielt, als sie zuvor hatte. So war z. E. 4 in der ersten niedrigsten Klasse = 4 Einer, hingegen 4 in der zweyten Klasse = 4.10 = 40 = vierzig, und 4 in der dritten Klasse = 4.10.10 = 400 = Vierhundert u. s. w. Würden wir nun diese Zahl 4, welche zuletzt = 400, wieder in die Klasse der Zehner setzen, so wäre selbige = 400:10

$= 40$, ferner diese 40 in die Klasse der Einer versetzet $= 40 : 10 = 4$. Setzten wir diese Division dieser Größe durch 10 weiter fort, so erhielten wir zum Quotienten Brüche, deren Nenner wirkliche Potenzen der Zehne sind, als

$$4 : 10 = \frac{4}{10},\quad \frac{4}{10} : 10 = \frac{4}{10^2 . 10} = \frac{4}{10^2} = \frac{4}{100}$$

u. s. w.

Diese Brüche, deren Nenner wirkliche Potenzen der Zehne sind, werden **Decimalbrüche** genennet, weil sie gleichfalls nach dem decadischen Gesetze eingerichtet sind, und auch hier das allgemeine Gesetz statt findet, daß **zehn Einheiten einer niedrigen Ordnung eine Einheit der nächst höhern ausmachen.**

§. 160. Bey der Schreibung der Decimalbrüche haben wir folgendes zu beobachten.

Es ist erforderlich, daß dieselbige ohne untergesetzten Nenner mit den übrigen gegebenen ganzen Zahlen in einer Reihe geschrieben werden, weil ihre Stellen den Werth bereits bestimt, den Ort zu bemerken, wo die Decimalbrüche den Anfang nehmen. Dieses geschiehet durch ein Comma (,), welches zwischen die Klasse der Einer und den ersten Decimalbruch gesetzet wird; so wäre also in $432,874$ die 8 der erste Decimalbruch.

Bey der Aussprache derselben nennet man zuerst, wie gewöhnlich, die vorhandenen Ganzen, und hierauf die Decimalbrüche, da man die davon vorhandene Zahlen als Zähler ausspricht, und den

Nen-

Nenner in der Potenz der Zehner, welche die Stelle des Zählers anzeiget, nebst angehängter Silbe tel oder theil nachsetzet. So würde z. E.

43^2, 874 welches $= 432 + \frac{8}{10} + \frac{7}{100} + \frac{4}{1000}$

ausgesprochen Vierhundert dreyßig und zwey ganze, acht Zehntel, sieben Hundertel, vier Tausentel.

Sind keine Ganze vor denen gegebenen Decimalbrüchen vorhanden, so setzet man an die Stelle der Einer eine 0, hinter selbige das Comma, und hierauf die Brüche. Z. E.

0, 8907, welches $= 0, \frac{8}{10} + \frac{9}{100} + \frac{7}{1000}$

würde ausgesprochen kein Ganzes, acht Zehntel, Neunhundertel, kein Tausentel, sieben Zehntausentel u. s. w.

Man kann also Decimalbrüche ohne oder mit untergesetztem Nenner schreiben, jedoch gebraucht man letztere Art nur alsdenn, wenn es etwa die Bequemlichkeit in der Rechnung erfordert. Die erstere Art hingegen ist die gewöhnlichste.

§. 161. Die Addition der Decimalbrüche, es mögen selbige allein oder mit ganzen Zahlen verbunden seyn, geschiehet auf die bey ganzen Zahlen gezeigte Art. Man setzet gleichnamigte unter einander, addiret selbige und nach vollendeter Addition streichet man von der Summa von der rechten gegen die linke Hand so viele Zahlen ab, als Decimalbrüche gegeben, und bemerket den Anfang der Brüche mit einem Comma. Z. E.

12,347 + 6,809 + 0,0034 + 7,3841 stünde also

12,347
6,809
0,0034
7,3841

26,5435

Es wäre also die Summa = 26,5435 = $26 + \frac{5}{10}$ $+ \frac{4}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{5}{10000} = 26 + \frac{5435}{10000}$ $= \frac{265435}{10000}$.

§. 162. Die Subtraction ist auch hier in allen Stücken, auch in Absicht des Borgens der bey ganzen Zahlen gezeigten Art völlig gleich. Z. E.

Minuendus 39.,7.4.08
Subtrahendus 20,9732

Differenz 18,7676

oder

Minuendus 3,4769
Subtrahendus 9,8.47.0

Differenz 6,3701

Auch in Absicht der Zeichen Plus und Minus gelten hier die gegebene Regeln; so wäre z. E.

− 69.,7.4.3.2
− 0,8743
+

− 68,8689 = $-68\frac{8689}{10000}$

und

− 3,0600
− 3,9.4.84
+

0,8884 = $\frac{8884}{10000}$.

ferner

ferner

— 6, 800764
4, 235428

11, 036192

Die Probe geschiehet auch hier durch die Addition; da also 9, 434 — 8, 732 = 0, 702 so muß 0, 702 + 8, 732 = 9, 434 seyn.

§. 163. Bey der **Multiplication** beobachtet man gleichfalls alle bey ganzen Zahlen gegebene Regeln. Es mögen nun beyde oder einer der Factoren aus Decimalbrüchen mit oder ohne ganze Zahlen bestehen, so multipliciret man, wie gewöhnlich; nach geschehener Multiplication

Zählet man die in beyden Factoren vorhandene Decimalbrüche, und streicher im Product von der rechten gegen die linke Hand eben so viel Zahlzeichen ab, und macht sie mit dazwischen gesetztem Comma zu Decimalbrüchen.

Z. E. 4, 97. 9, 3 stehet also

4, 97 Multiplicandus
9, 3 Multiplicator

1491
4473

46, 221 Product.

Das Product ist = 46221. Weil aber in beyden Factoren drey Decimalbrüche vorhanden, so werden in dem Product 221 als Decimalbrüche durch

durch ein hinter die Klasse der Einer, welche hier 6, gemachtes Comma abgeschnitten, mithin ist

$$4;97.9,3 = 46,221 = 46\frac{221}{1000}.$$

Den Beweiß hievon werden wir leicht einsehen, denn da $4,97 = 4\frac{97}{100} = \frac{497}{100}$

und $9,3 = 9\frac{3}{10} = \frac{93}{10}$

so folget, daß $4,97.9,3 = 4\frac{97}{100} \cdot 9\frac{3}{10} = \frac{497}{100} \cdot \frac{93}{10}$

also $46,221 = \frac{46221}{1000}$

ferner $-9,034 . -3,8 = -9\frac{34}{100} . -3\frac{8}{10}$

$= -\frac{9034}{1000} . -\frac{38}{10} = \frac{343292}{100000} = 34\frac{3292}{10000}$

$= 34,3292.$

Kommen im Product nicht so viel Ziffern heraus, als nach der gegebenen Regel abgestrichen werden sollten, so setzt man vor selbiges noch so viel Nullen, als die noch fehlenden Stellen der Decimalbrüche erfordern, macht alsdenn ein Comma, und anstatt der Einer eine 0.

Z. E. 0,0072.0,0004 stünde also

0,0072 Multiplicandus
0,0004 Multiplicator

0,00000288 Product.

In diesem Product sind nur drey Zahlzeichen, es sollten aber nach denen in beyden Factoren befindlichen Decimalbrüchen 8 abgestrichen werden; man setzet also für die noch fehlende noch 5 Nullen vor 288, hierauf das Comma, und weil keine Ganze vorhanden, an deren Stelle eine 0. Es ist also

$0,0072.0,0004 = \frac{72}{10000} \cdot \frac{4}{1000} = \frac{288}{10000000}$

$= 0,00000288.$

§. 164. Bey der Division bemerken wir folgende allgemeine Regel, welche auf alle vorkommende Fälle passet. Nemlich

Man dividiret zuerst auf die gewöhnliche Art. Nachher zählet man, ob im Dividendus oder im Divisor mehr oder in beyden gleich viel Decimalbrüche sind. Sind in beyden gleich viel, so lässet man den Quotienten unverändert, und er bestehet aus ganzen Zahlen. Sind im Dividendo mehr Decimalbrüche, so streichet man, von der rechten Hand an gerechnet, vom Quotienten so viel Zahlen ab, und macht sie zu Decimalstellen, als der Dividendus mehr Decimalbrüche als der Divisor hat.

Sind im Divisor mehr Decimalbrüche, so hängt man dem Quotienten so viel Nullen noch an, und macht also so viel Klassen jede Zahl des Quotienten größer, als der Divisor mehr Decimalbrüche hat.

Die Anwendung dieser gegebenen Regeln wollen wir bey folgenden Fällen zeigen.

1) Wenn im Divisor und Dividendo gleich viel Decimalbrüche sind, es mögen übrigens in beyden oder nur in einem auch ganze Zahlen oder beyde allein aus Decimalbrüchen bestehen. Z. E. 486,42 : 2,42 also

48642 | 201
(242)
484

242
(242)

000

Der Quotient ist hier = 201 ganze. Denn

$486{,}42 : 2{,}42 = 486\frac{42}{100} : 2\frac{42}{100} = \frac{48642}{100} : \frac{242}{100}$
$= \frac{48642}{100} \cdot \frac{100}{242} = \frac{4864200}{24200} = \frac{4864200 : 100}{24200 : 100}$
$= \frac{48642}{242} = 201.$

ferner $7{,}36 : 0{,}32 = 23$. Denn

$7{,}36 : 0{,}32 = \frac{736}{100} : \frac{32}{100} = \frac{736}{100} \cdot \frac{100}{32} = \frac{73600}{3200}$
$= \frac{73600 : 100}{3200 : 100} = \frac{736}{32} = 23.$

2) Wenn im Dividendo mehr Decimalbrüche als im Divisor sind. Z. E. 14,7 : 7 also

147 | 2,1
(7)
14

7
(7)

0

Hier ist der Quotient = 2,1 = $2\frac{1}{10}$, weil im Dividendo ein Decimalbruch, im Divisor hingegen kein Decimalbruch befindlich. Denn

$14{,}7 : 7 = \frac{147}{10} : \frac{7}{1} = \frac{147}{10} \cdot \frac{1}{7} = \frac{147}{70} = 2\frac{7}{70} = 2\frac{7 : 7}{70 : 7}$
$= 2\frac{1}{10} = \frac{21}{10} = 2{,}1.$

3)

3) Wenn im Divisor mehr Decimalbrüche als im Dividendo sind. Z. E. 2484 : 0,23, also

2484 | 108
(23)
18
(23)
784
(23)
784
000

Der Quotient wäre zwar = 108, es werden selbigem aber nach der gegebenen Regel 2 Nullen angehängt. Denn

$2484 : 0,23 = 2484 : \frac{23}{100} = \frac{2484}{1} : \frac{23}{100}$
$= \frac{2484}{1} \cdot \frac{100}{23} = \frac{248400}{23} = 10800.$

§. 165. Alle Brüche, sowohl ächte als unächte können in einen Decimalbruch verwandelt werden. Dieser Vortheil ist von großer Wichtigkeit, ohnerachtet man nicht allemal einen Decimalbruch erhält, welcher dem verwandelten völlig gleich. Die Differenz wird zwar am Ende so klein werden, daß sie für nichts zu achten.

Das Verfahren, einen gegebenen Bruch in einen Decimalbruch zu verwandeln, ist folgender.

Dem Zähler des gegebenen Bruchs hängt man so viel Nullen an, als man will.

Dieser Zähler wird durch den Nenner dividiret; zum Quotienten setzet man, wenn

wenn der gegebene Bruch ein ächter, an statt der Ganzen eine o, und dahinter ein Comma; ist es aber ein unächter Bruch, so dividiret man den Zähler durch den Nenner, und setzet hinter den Quotienten das Comma.

Man dividiret alsdenn so lange fort, als man kann oder will, so bekommt man einen Quotienten, der dem gegebenen Bruch entweder ganz oder beynahe gleich. Z. E. $\frac{3}{4} = \frac{300}{4} = 0,75$.
ferner $\frac{27}{4} = \frac{2700}{4} = 6,75$.
und $\frac{2}{7} = \frac{2000000}{7} = 0,285714 \ldots\ldots$
Im letztern Exempel haben wir zum Quotienten einen Decimalbruch erhalten, welcher nur noch $\frac{2}{7000000}$ kleiner als $\frac{2}{7}$. Denn
$\frac{2000000}{7} = 0,285714\frac{2}{7000000}$, folglich
$0,285714 + \frac{2}{7000000} = \frac{285714}{1000000} + \frac{2}{7000000}$
$= \frac{285714}{1000000} : \frac{7}{7} + \frac{2}{7000000} = \frac{1999998+2}{7000000}$
$= \frac{2000000}{7000000} = \frac{2000000 : 1000000}{7000000 : 1000000} = \frac{2}{7}$.

Auf solche Art verfähret man mit allen Brüchen, welche in einen Decimalbruch verwandelt werden sollen, und so viel Nullen dem Zähler eines Bruchs angehänget werden, aus eben so viel Decimalstellen wird der erhaltene Quotient bestehen.

§. 166. Diese jetzt gezeigte Art, Brüche in einen Decimalbruch zu verwandeln, gebraucht man auch, wenn bey einem Divisionsexempel in ganzen Zahlen ein Rest bleibet. Anstatt selbigen mit un-

ter-

tergesetztem Divisor dem Quotienten anzuhängen, verwandelt man den Rest in einen Decimalbruch von so viel Nullen, bis die Differenz zwischen diesem und dem Rest für nichts zu achten. Z. E.

4832 : 18

4832 | $268\frac{8}{18} = 268\frac{8:2}{18:2} = 268\frac{4}{9}$

(18)

36

72.8

(18)

108

72.4

(18)

144

8

Der Quotient ist hier $= 268\frac{4}{9}$. Man hänget aber an den Rest 8 eine Null, dividiret also 80 durch 18, und setzet den erhaltenen Quotienten 4 in einen Decimalbruch, nachdem man zuforderst hinter die ganzen Zahlen des Quotienten, wie hier bey 8, ein Comma gemacht. Dem neuen Rest 8 hänget man wieder eine o an, und den Quotienten setzet man zum nächstfolgenden Decimalbruch. Auf solche Art fähret man fort zu dividiren, bis der Unterschied zwischen diesen erhaltenen Decimalbrüchen und Rest für nichts zu achten. So wäre in beygesetztem Exempel, da alle Decimalbrüche $= 4$, der Quotient $268\frac{8}{18} = 268,44444444....$ bis ins Unendliche, wie aus der Berechnung zu ersehen.

48 32 | 268,444.....

(18)

36

12.3

(18)

108

15.2

(18)

144

8.0

(18)

72

8.0

(18)

72

8.0

(18)

72

8

§. 167. Wenn Brüche in Decimalbrüche verwandelt werden, lassen sich selbige auch sehr bequem mit einander vergleichen. Z. E. $\frac{3}{4}$ und $\frac{4}{5}$ sind in Decimalbrüchen $= 0,75$ und $0,8$. Da nun $\frac{3}{4} = 0,75$ und $\frac{4}{5} = 0,8$, auch $\frac{75}{100} < \frac{80}{100}$, so folget ganz natürlich, daß auch $\frac{3}{4} <$ als $\frac{4}{5}$.

Man könnte auch die Differenz beyder gegebenen Decimalbrüche durch die Subtraction leicht bestimmen, obgleich nicht bey allen Decimalbrüchen, deren Zahlen unendlich, die hintersten Zahlen

der Differenz völlig richtig sind. In diesen gegebenen Brüchen 0,75 und 0,8 lässet sich die Differenz genau bestimmen, und wäre

$0{,}8 - 0{,}75 = 0{,}80 - 0{,}75 = 0{,}05 = \frac{5}{100}$

es ist also $\frac{4}{5}$ um $\frac{5}{100}$ größer als $\frac{3}{4}$.

§. 168. Wir wollen nunmehro noch zeigen, wie man auch Reste bey Decimalbrüchen in Decimalbrüche verwandeln könne. Dieses geschiehet auf eben die §. 166 gezeigte Art, daß man nemlich den Resten Nullen anhänget, mit der Division fortfähret, und alsdenn die Quotienten als Decimalbrüche an ihre gehörige Stellen setzet. Wir bemerken aber hi bey folgendes:

1) Sind im Dividendo und Divisor gleich viel Decimalbrüche, so findet sich die erste Stelle der Decimalbrüche im Quotienten von selbst, weil selbiger eine ganze Zahl; man hat alsdenn nur nöthig, hinter die niedrigste Klasse des Quotienten, also der Einh it, ein Comma zu setzen, und hinter selbiges den Quotienten der Decimalbrüche. Z. E. 84,3 : 2,1 stünde also

843 | 40,1428....
(21)
84

3
(21)

30
(21)

90
(21)
84

60
(21)
42

180
(21)
168

12

2) Sind im Dividendo mehr Decimalbrüche als im Divisor, so streichet man zuerst im Quotienten nach §. 163. die gehörigen Zahlen als Decimalbrüche ab, dem Reste hängt man Nullen an, dividiret wie gezeiget, und setzet diese Quotienten immer an die bereits im erstern Quotienten vorhandene Decimalbrüche, und wird hiedurch von selbst ihnen ihre gehörige Stelle bestimmt. Z. E. 7,49:82, also

```
740 | 0,0913411.....
(82)|
738
---
110
(82)
---
280
(82)
---
340
(82)
---
328
---
120
(82)
---
38
```

In gegenwärtigem Exempel konnte der erstere Quotient 9 weder in die Klasse der Ganzen, weil die erstere Zahl 8 des Divisors größer als des Dividendi 7, noch in die Stelle der Zehntel gesetzt, also $\frac{9}{10}$ werden, weil im Dividendo zwey Decimalbrüche und im Divisor keiner vorhanden, er war also $= \frac{9}{100}$, die übrigen Quotienten des in einem Decimalbruch verwandelten Restes werden also nach der gegebenen Vorschrift dieser 9 beygefügt. Es ist also

$7,49 : 82 = \frac{749}{100} : \frac{82}{1} = \frac{749}{100} \cdot \frac{1}{82} = \frac{749}{8200}$
$= 0,0913411.....$

3) Sind aber im Divisor mehr Decimalbrüche als im Dividendo, so werden anstatt der Nullen, wovon §. 163. erwähnet, von denen durch

die Division des Restes erhaltenen Quotienten so viel Zahlen als ganze an den erstern Quotienten gesetzet, wie der Divisor mehr Decimalbrüche als der Dividendus hat. Die übrigen Zahlen des durch die Division des Restes erhaltenen Quotienten aber sind wirkliche Decimalbrüche. Z. E. 894:0,37 stünde also

894 | 2416,21 .....
(37)
74

148
(37)

110
(37)

730
(37)

330
(37)

74

60
(37)

23

§. 169. Die Probe der Multiplication geschiehet auch hier durch die Division, so wie die Multiplication uns von dem richtigen Dividiren überzeuget. Wenn aber bey dem Dividiren die Decimalbrüche ins Unendliche fortgehen, so bekommt

kommt man nie durch die Multiplication des Quotienten mit dem Divisor den Dividendum genau, sondern in den letzten Zahlen wird solcher unrichtig werden.

§. 170. Sowohl bey der Multiplication als Division der Decimalbrüche behält auch das allgemeine Gesetz, daß einerley Zeichen Plus, verschiedene Minus zum Product oder Quotienten geben, seine Gültigkeit.

§. 171. Wenn es erforderlich, so können auch Decimalbrüche wieder in gewöhnliche Brüche verwandelt werden. Man setzet unter selbige nur zum Nenner 1 mit so viel Nullen, als Decimalstellen sind, und verkleinert hierauf den erhaltenen Bruch. Z. E.

$$0{,}875 = \frac{875}{1000} = \frac{875 : 125}{1000 : 125} = \frac{7}{8}.$$

Gehen aber die Zahlen des Decimalbruchs ins Unendliche fort, so ist dieses Verfahren nicht gewiß, und man nähert sich nur der Wahrheit, es wäre denn, daß einerley Zahlen immer wiederholet würden. Auch hievon werden wir am Ende der Lehre von der geometrischen Progression etwas anführen.

Das neunte Kapitel.

Von Verhältnissen.

§. 172. Alle gleichnamigte Größen können in Absicht derer in ihnen vorhandenen Einheiten

mit einander verglichen werden. Diese Vergleichung selbst wird ein Verhältniß genennet. Die Beurtheilung der Größe geschiehet entweder durch die Subtraction, bey welcher die Differenz die Entscheidung giebt, um wie viel die eine größer als die andre, oder durch die Division, in welcher der Quotient uns überzeuget, um wie vielmal die eine größer als die andere. Ersteres wird ein arithmetisches, letzteres ein geometrisches Verhältniß, oft auch bloß ein Verhältniß genennet.

§. 173. Das Zeichen, wodurch die Vergleichung zwoer Größen durch die Subtraction angezeiget wird, ist (—). So ist also z. E. 4—3 und a—b ein arithmetisches Verhältniß, und bey beyden entscheidet die Differenz die Größe.

§. 174. Bey einem arithmetischen Verhältniß haben wir zu betrachten 1) die große Zahl; 2) die kleine Zahl; 3) die Differenz.

In der Lehre der Subtraction §. 54. zeigten wir, daß M — S = D und M = S + D; oder ohne Zeichensprache: der Minuendus minus des Subtrahendi ist gleich der Differenz und der Minuendus gleich dem Subtrahendo plus der Differenz. Wäre nun hier M = der großen Zahl = a, S = der kleinen Zahl = b, ferner D = der Differenz = d, so folget, daß auch hier, da a—b = d, auch a = b + d. Man siehet also hieraus schon zum Voraus, daß, wenn nur zwey von diesen drey Größen bekannt, die dritte sich daraus leicht bestimmen lässet.

§ 175.

§. 175. Das Zeichen, durch welches die Vergleichung zwoer Größen durch die Division bemerket wird, ist wie bey der gewöhnlichen Division (:), oder ein Querstrich zwischen beyde über einander gesetzte zu vergleichende Größen. Es wird also ein **geometrisches Verhältniß** also angezeiget:

$$4:2 \text{ oder } \frac{4}{2} \text{ ferner } a:b \text{ oder } \frac{a}{b}.$$

§. 176. In der Division wurde die Zahl oder Größe, welche man durch die Division erhielt, der Quotient genennet; bey einem geometrischen Verhältniß aber bekommt selbige den Namen Exponent.

Ein jedes geometrisches Verhältniß kann nicht nur als ein Divisionsexempel, sondern auch als ein Bruch betrachtet werden. Es folget also auch hier nach §. 123.

1) Daß, wenn der Dividendus oder Zähler, welchen wir das erste Glied des geometrischen Verhältnisses nennen wollen, kleiner als der Divisor oder Nenner, welcher hier das zweyte Glied des geometrischen Verhältnisses ist, alsdenn auch der Quotient oder hier der Exponent kleiner als 1, mithin ein ächter Bruch werden müsse.

2) Daß alle Veränderungen, welche mit einem Bruch vorgenommen werden können, auch mit einem geometrischen Verhältniß zu unternehmen sind. Werden also beyde Glieder eines **geometrischen Verhältnisses** mit einerley

Zahl multipliciret oder dividiret, so bleibet dennoch das Verhältniß ungeändert. Es ist also

$$12:4 = \frac{12}{4} = \frac{12:4}{4:4} = \frac{3}{1} = 3:1 = 3$$

$$\text{und } a:b = \frac{a}{b} = \frac{a:c}{b:c} = \frac{a}{c}:\frac{b}{c} = \frac{a}{c}.\frac{c}{b} = \frac{ac}{bc}$$

$$\text{ferner } 12:6 = \frac{12}{6} = \frac{12.2}{6.2} = \frac{24}{12} = 24:12 = 2$$

$$\text{und } a:b = \frac{a}{b} = \frac{a.c}{b.c} = \frac{ac}{bc} = ac:bc.$$

Bey einem geometrischen Verhältniß, dessen Glieder aus großen Zahlen bestehen, gereicht es zu großer Bequemlichkeit, daß man solche, wenn es sich thun lässet, nach §. 129. durch die Division verkleinert.

Das zehnte Kapitel.

Von der arithmetischen Proportion und Progression.

§. 177. Zwey arithmetische Verhältnisse, in welchen die Differenzen einander gleich, werden eine **arithmetische Proportion** genennet. Das Zeichen, durch welches die Gleichheit zweyer arith-

me-

metischer Verhältnisse angezeiget wird, ist das bereits so oft gebrauchte Zeichen =, welches zwischen beyde arithmetische Verhältnisse gesetzet wird. So wären also z. E. 9—6 = 7—4 und 4—8 = 5—9 beyde arithmetische Proportiones; denn im erstern ist von beyden Verhältnissen die Differenz = 3, und im letztern die Differenz = — 4.

Es mag in einem arithmetischen Verhältniß das erste Glied größer oder kleiner als das zweyte Glied seyn, so bestehet allemal das größeste Glied aus dem kleinern Plus der Differenz. Wir wollen jetzt eine arithmetische Proportion erwählen, in deren beyden Verhältnissen das erste Glied kleiner als das zweyte. Das erste Glied des ersten Verhältnisses sey = a, und das erste Glied des zweyten Verhältnisses sey = b, die Differenz beyder Verhältnisse = d. Es werden also alle mögliche arithmetische Proportiones auf folgende Art vorgestellet werden können

$a-(a+d) = b-(b+d)$, oder in Zahlen

$4-(4+3) = 6-(6+3)$ also $4-7 = 6-9$.

Wir bemerken hier noch, daß, wenn das erste Glied in beyden Verhältnissen größer als das zweyte Glied, nach eben jetzt gezeigter Formel $a+d$ und $b+d$ das d als eine Minusgröße betrachtet wird.

§. 178. In einer arithmetischen Proportion ist entweder das zweyte Glied dem dritten ungleich oder gleich. Ist ersteres, so wird selbige eine discrete, ist letzteres, wird solche eine continuirliche arithmetische Proportion genennet. Es wäre also

a—

$a-(a+d)=b-(b+d)$ und $8-17=9-18$ eine discrete,
hingegen $a-(a+d)=(a+d)-(a+2d)$ und $6-7=7-8$ eine continuirliche arithmetische Proportion.

In diesem letztern allgemeinen Ausdruck einer continuirlichen arithmetischen Proportion haben wir anstatt b zum dritten Gliede $a+d$ gesetzet, weil dieses dem zweyten Gliede gleich seyn muß; da nun das vierte Glied um d größer als das dritte, so muß auch hier das vierte Glied gleich seyn

$$a+d+d=a+2d.$$

§. 179. In allen arithmetischen Proportionen, sie mögen discret oder continuirlich seyn, muß die Summa der beyden mittlern Glieder gleich seyn der Summa der beyden äußern. So ist z. E. in $4-9=10-15$, die Summa $4+15=9+10=19$.

oder da $4-9=9-14$

so ist $4+14=9+9$

denn $18=18$

ferner da $a-(a+d)=b-(b+d)$

so muß $a+b+d=a+d+b$

desgleichen da $a-(a+d)=(a+d)-(a+2d)$

so muß $a+a+2d=a+d+a+d$

denn $2a+2d=2a+2d$

oder $(a+d)2=(a+d)2$.

§. 180.

§. 180. In allen arithmetischen Proportionen können auch einige Glieder mit einander verwechselt werden, als das erste mit dem zweyten, aber auch zugleich das dritte mit dem vierten, oder das zweyte mit dem dritten, und zugleich das vierte mit dem ersten ꝛc. Z. E.

da $4 - 8 = 6 - 10$

so ist $8 - 4 = 10 - 6$

und $10 - 6 = 8 - 4$

ferner $4 - 6 = 8 - 10$

und $6 - 4 = 10 - 8$.

Daß alle jetzt gezeigte durch Verwechselung der Glieder entstandene Proportiones, wirkliche arithmetische Proportiones sind, beweiset sich dadurch, weil in allen die Summa der mittlern Glieder gleich der Summa der äußern, denn in allen ist selbige $= 14$.

§. 181. Eine jede arithmetische Proportion bestehet also aus vier Gliedern. Fehlet eines von selbigen, es sey welches es wolle, so können wir solches sehr leicht finden. Wir haben nur nöthig, von der Summa, deren beyde Glieder bekannt, das dritte gegebene Glied abzuziehen, so giebt die Differenz das fehlende. So wäre also in folgender Proportion $4 - 12 = 16 - x$

da nach §. 179. $4 + x = 12 + 16$

hievon gleiches

subtrahirt $4 = 4$

$x = 12 + 16 - 4$

$x = 24.$

ferner

ferner in $4-12=x-24$

ist $x=24+4-12=28-12=16$

und in $a-b=c-x$

$x=b+c-a$

Die Uebereinstimmung der Summa der mittlern Glieder mit der Summa der äußern Glieder beweiset in allen dreyen Exempeln, daß das gefundene Glied das rechte sey. Denn in erstern beyden Exempeln ist

$4+24=12+16$

oder $28=28$

und im letztern ist

$b+c=a+b+c-a$

also $b+c=b+c.$

§. 182. Sind in einer continuirlichen arithmetischen Proportion die beyden äußern Glieder bekannt, so bestimmt deren Summa, durch 2 dividiret, eines der mittlern Glieder. Da nun beyde mittlern Glieder einander gleich, so sind alsdenn alle vier Glieder bekannt. Z. E. da

$8-x=x-20$

und $2x=8+20$

so ist $x=\frac{8+20}{2}=\frac{28}{2}=14.$

Daß solches gegründet, zeiget folgende Proportion

$8-14=14-20$

in welcher $14+14=8+20$

oder $28=28$

Dieses

Dieses Mittels bedienet man sich vornemlich, wenn von einer Sache zwey verschiedene Werthe gegeben, den mittlern Werth zu finden. Man addiret alsdenn beyde gegebene Werthe, und dividiret die Summa durch 2, so giebt der Quotient den mittlern Werth.

Z. E. der Werth eines Pferdes wird bey einer Vergleichung von einem zu 80 Thaler, von dem andern zu 96 Thaler bestimmt, so würde der mittlere Werth desselben seyn

$$\frac{80+96}{2} = \frac{176}{2} = 88 \text{ Thaler.}$$

und 88 wäre das mittlere Glied in einer arithmetischen continuirlichen Proportion. Denn

$$80-88 = 88-96$$

und $80+96 = 88+88$

oder $176 = 176.$

§. 183. Eine Reihe von Größen, in welcher jedes Glied immer um die Differenz der beyden vordern Glieder wächset oder abnimmt, wird eine arithmetische Progression genennet. Z. E. sowohl 2, 4, 6, 8 als 12, 9, 6, 3 ist eine arithmetische Progression; denn in ersterer wächset jedes Glied um die Differenz 2, und in letzterer nimmt jedes Glied um die Differenz 3 ab. Erstere ist eine steigende, letztere eine fallende arithmetische Progression.

Beyde Arten entstehen, wenn man in einer arithmetischen continuirlichen Proportion das dritte Glied wieder zum ersten und das vierte Glied zum

zwey-

zweyten und dritten Gliede einer neuen Proportion macht, und alsdenn das vierte sucht. So ist also 2, 4, 6, 8 folgendergestalt entstanden

$2-4 = 4-6$, ferner $4-6 = 6-8$

Allgemein können die Glieder einer arithmetischen Progression, sie sey steigend oder fallend, folgendergestalt vorgestellt werden

$a,\ a+d,\ a+2d,\ a+3d,\ a+4d$ u. s. w.

Ihre Entstehung ist der vorigen gleich, und zwar

$$a-(a+d) = (a+d)-(a+2d),$$

ferner $(a+d)-(a+2d)=(a+2d)-(a+3d)$
und $(a+2d)-(a+3d)=(a+3d)-(a+4d)$
u. s. w.

§. 184. Man pflegt auch wohl über die Glieder einer arithmetischen Progression die natürlichen Zahlzeichen zu setzen, um zu sehen, das wie vielste Glied ein jedes in der Progression sey. Diese Zahlzeichen nennet man den Zeiger. Z. E.

Zeiger	1	2	3	4	5
	a,	$a+d$,	$a+2d$,	$a+3d$,	$a+4d$.

Betrachten wir diese unter dem Zeiger befindliche Glieder genau, so finden wir, daß in jedem Gliede die Differenz oder d um eins sich weniger befindet, als der Zeiger oder die Zahl des Gliedes groß ist. Z. E. im fünften Gliede sind nur 4d befindlich. Wenn also das erste Glied und die Differenz einer arithmetischen Progression bekannt, so kann man ein jedes verlangtes Glied sehr leicht finden, denn das gesuchte wird gleich seyn, dem erstern Gliede plus der Differenz einmal weniger genommen, als die Zahl des verlangten Gliedes

groß

groß ist; es wäre also das eilfte Glied obiger angeführter Progression $= a + 10d$.

Allgemein könnte das letzt Glied einer jeden arithmetischen Progression, in welcher das erste Glied $= a$, die Differenz $= d$, und die Zahl der Glieder $= n$, also vorgestellet werden $a + (n-1)d$.

In Zahlen würde, wenn $a = 3$, $d = 4$, $n = 7$ also $a + (n-1)d = 3 + (7-1)4 = 3 + 6.4 = 3 + 24 = 27$.

Und die Glieder dieser arithmetischen Progression würden folgende seyn:

3, 7, 11, 15, 19, 23, 27.

Da man nun ein jedes verlangte Glied in einer arithmetischen Progression als das letzte Glied derselben ansehen kann, so folget, daß die gegebene Formel zu Findung aller verlangten Glieder hinreichend.

§. 185. Durch die fortgesetzte Addition zweyer gleich weit von den Enden abstehender Glieder einer arithmetischen Progression, bekommt man immer einerley Summa. Z. E. in

1 2 3 4 5

$a, a+d, a+2d, a+3d, a+4d,$

ist die Summa des ersten und fünften Gliedes, als $a + a + 4d = 2a + 4d$, gleich der Summa des zweyten und vierten Gliedes, oder $a + d + a + 3d = 2a + 4d$.

Eben so auch in Zahlen. Z. E.

3, 6, 9, 12, 15, 18

hier ist $3 + 18 = 6 + 15 = 9 + 12 = 21$.

Es ist also sehr leicht, die Summa aller Glieder einer gegebenen arithmetischen Progression zu finden, man hat nur nöthig, die Summa zweyer gleich weit von den Enden abstehenden Glieder mit der Anzahl der Glieder zu multipliciren, und das Product durch 2 zu dividiren. So wäre z. E. die Summa obiger arithmetischer Progression

$$3, 6, 9, 12, 15, 18 = \frac{21.6}{2} = 63.$$

Die Summa einer arithmetischen Progression, wenn a = dem ersten Gliede, und $a+(n-1)d$ = dem letzten Gliede, würde allgemein vorgestellet, folgende seyn

$$(2a+(n-1)d)\frac{n}{2} = \frac{2an}{2} + \frac{(n-1)nd}{2}$$

$$= an + \frac{(n-1)dn}{2} = an + \frac{(n^2-n)d.}{2}$$

§. 186. Folgende Exempel werden das bisher gelehrte hinlänglich erläutern.

Erstes Exempel. Das erste Glied in einer arithmetischen Progression sey = 4, die Differenz = 2, die Zahl der Glieder = 19, wie groß ist die Summa aller dieser Glieder?

Die Summa aller Glieder ist nach der gegebenen Formel

$$an + \frac{(n-1)nd}{2} = 4.19 + \frac{(19-1)19.2}{2}$$

$$= 76 + \frac{18.38}{2} = 76 + \frac{684}{2} = 76 + 342 = 418.$$

Zwey-

Zweytes Exempel. Es läßt jemand einen Brunnen graben, und verspricht für den ersten Fuß tief 3 mgr., für jeden folgenden Fuß 2 mgr. mehr zu bezahlen. Weil er fertig, ist selbiger 50 Fuß tief, was kostet er also zu graben?

Das erste Glied oder a ist hier = 3 mgr., die Differenz oder d = 2 mgr, die Zahl der Glieder oder n = 50 Fuß, also die Summa

$$= an + \frac{(n-1)nd}{2} = 3 \cdot 50 + \frac{(50-1)50.2}{2}$$

$$= 150 + \frac{49.100}{2} = 150 + \frac{4900}{2} = 150 + 2450$$

$$= 2600 \text{ mgr.} = \frac{2600}{3} \text{ Thaler} = 72\frac{8}{3} \text{ Thaler}$$

$$= 72 \text{ Thaler } 8 \text{ mgr.}$$

Drittes Exempel. Wie viel beträgt die Erbschaft von 6 Personen in Summa, wenn der erste 1500 Thaler, und jeder folgende 300 Thlr. mehr erhalten.

Hier ist a = 1500 Thlr., d = 300 Thlr., und n = 6, also

$$an + \frac{(n-1)nd}{2} = 1500.6 + \frac{(6-1)6.300}{2}$$

$$= 9000 + \frac{5.1800}{2} = 9000 + \frac{9000}{2} = 9000$$

$$+ 4500 \text{ Thlr.} = 13500 \text{ Thlr.}$$

Das eilfte Kapitel.

Von der geometrischen Proportion.

§. 187. Eine geometrische Proportion entstehet aus zwey geometrischen Verhältnissen, deren Exponenten gleich groß sind. Was ein geometrisches Verhältniß, was Exponent, ist §. 172 und §. 176. hinlänglich erkläret. Die Verbindung zwoer gleich großer geometrischen Proportionen geschiehet auch hier durch das Zeichen der Gleichheit; so wären z. E.
8:4=6:3, ferner 7:3=21:9, und 2:6=3:9 sämtlich geometrische Proportiones, denn in ersterer ist der Exponens beyder Verhältnisse =2, im zweyten sind beyder Exponenten $= 2\frac{1}{3}$, und im dritten sind selbige $= \frac{1}{3}$.

Aus angeführten Beyspielen sehen wir zugleich, daß der Exponent einer geometrischen Proportion sowohl eine ganze Zahl, als auch ein unächter oder ein ächter Bruch seyn kann.

§. 188. Eine jede geometrische Proportion bestehet aus vier Gliedern, wovon allemal das zweyte aus dem ersten, und das vierte aus dem dritten mit einerley Exponenten multipliciret entstanden. Wir bemerken zugleich, daß das erste und dritte, ferner das zweyte und vierte Glied ähnliche Glieder genennet werden.

§. 189 Alle mögliche geometrische Proportionen, es mag der Exponent eine ganze Zahl, ein unächter oder ächter Bruch seyn, können allgemein folgendergestalt ausgedrückt werden.

$$a:am = b:bm.$$

Auch hier bestehet nach der §. 188. gegebenen Regel sowohl das zweyte Glied des erstern Verhältnisses aus dem ersten Gliede a mit dem Exponenten m multipliciret, als auch das zweyte Glied des zweyten Verhältnisses, aus dessen erstem Gliede b mit dem Exponenten des erstern Verhältnisses m multipliciret. Da nun in beyden Verhältnissen die Exponenten gleich groß, so folget, daß

$$a:am = b:bm$$

eine wahre geometrische Proportion ist.

§. 190. Die mittlern Glieder einer geometrischen Proportion sind entweder in der Größe unterschieden, oder sind gleich groß. Ist ersteres, so entstehet eine discrete geometrische Proportion. Z. E.

$a:am = b:bm$ oder $4:8 = 6:12$

sind discrete geometrische Proportiones.

Sind hingegen beyde mittlere gleich groß, so wird solches eine continuirliche geometrische Proportion genennet. Es sind also

$a:am = am:am^2$, oder $4:4.2 = 4.2:4.2^2$

ferner $4:8 = 8:4.4$ und $4:8 = 8:16$

continuirliche geometrische Proportiones.

§. 191. In allen geometrischen Proportionen muß 1) das Product der beyden äußern Glieder

gleich seyn, dem Product der beyden mittlern Glieder. So ist also in

$a:am = b:bm$ und in $a:am = am:am^2$

$abm = amb$ $a.am^2 = am.am$

$a^2m^2 = a^2m^2$.

2) Die Quotienten, welche durch die Division des ersten durch das zweyte, und zugleich des dritten durch das vierte Glied, oder des zweyten durch das erste, und zugleich des vierten durch das dritte Glied entstehen, müssen gleich groß seyn. Da also

$a:am = b:bm$ ferner da $a:am = am:am^2$

so muß $\frac{a}{am} = \frac{b}{bm} = \frac{1}{m}$ so ist $\frac{a}{am} = \frac{am}{am^2} = \frac{1}{m}$

und $\frac{am}{a} = \frac{bm}{b} = m$ und $\frac{am}{a} = \frac{am^2}{am} = m$.

§ 192. Da die Quotienten beyder Verhältnisse in einer geometrischen Proportion einander gleich sind, und nach §. 176. ein jedes Verhältniß als ein Bruch betrachtet werden kann, so folget auch, daß nicht nur zween Brüche, die einander gleich, in Proportion gesetzet werden können, sondern auch beyde Verhältnisse durch Brüche ausgedrückt werden können. Es sey z. E.

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, so folget, daß $a:b = c:d$

oder in Zahlen

$\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$, folglich $3:4 = 6:8$, dann $ad = bc$

so wie $3.8 = 4.6$, weil $24 = 24$.

§. 193. Alle geometrische Proportionen können verändert werden

1) durch Versetzung der Glieder.
2) Durch die Addition oder Subtraction.
3) Durch die Multiplication.
4) Durch die Division.
5) Durch Erhebung der Glieder zu Potenzen oder durch Ausziehung der Wurzel.

Wir wollen bey allen Veränderungen die erstere Fundamentalproportion, nemlich

$$a : am = b : bm$$

erwählen, weil auch hierdurch die continuirliche $a : am = am : am^2$ vorgestellet werden kann, da alsdann $b = am$.

§. 194. Die erste Veränderung. Durch Versetzung der Glieder.

Da $a : am = b : bm$, so folget, daß

$am : a = bm : b$, und

$a : b = am : bm$,

ferner $b : a = bm : am$, und

$b : bm = a : am$.

In allen Proportionen sind hier die Producte der äußern Glieder gleich dem Producte der mittlern, und ist solches allemal $abm = bam$, weil nach §. 65. Factores in geänderter Ordnung allemal einerley Product geben.

Die zwote Veränderung. Durch die Addition oder Subtraction. Z. E.

Da $a : am = b : bm$, so folget, daß

$(a + am) : am = (b + bm) : bm$, weil

$(a + am)bm = (b + bm)am$, oder

$abm + abm^2 = abm + abm^2$.

ferner weil a:am = b:bm, so muß auch
(a—am):am = (b—bm):bm, denn
(a—am)bm = (b—bm)am, und
abm—abm² = abm—abm².

Die dritte Veränderung. Durch die Multiplication. Es sey
a:am = b:bm, so wird
ac:am = bc:bm, denn
acbm = ambc
ferner da a:am = b:bm, so ist
ac:amc = bc:bmc, weil
acbmc = amcbc.

Die vierte Veränderung. Durch die Division. Z. E.
a:am = b:bm, folglich
$\frac{a}{c}$:am = $\frac{b}{c}$:bm, weil
$\frac{a}{c}$.bm = am.$\frac{b}{c}$, und
$\frac{abm}{c} = \frac{amb}{c}$.

Bey allen jetzt gezeigten Veränderungen durch die vier Rechnungsarten ist aber vorzüglich zu beobachten, daß entweder mit allen vier Gliedern, oder jedesmal mit den ähnlichen Gliedern solches vorgenommen werde. Außerdem lassen sich aber auch hier alle Veränderungen durch Versetzung der Glieder vornehmen.

Die

Die fünfte Veränderung.

1) Durch die Erhebung der Glieder zu Potenzen. Z. E.

da $a:am = b:bm$, so ist

$a^2:a^2m^2 = b^2:b^2m^2$, denn

$a^2b^2m^2 = a^2m^2b^2$.

2) Durch Ausziehung der Wurzel, welche wir hier nur durch Zeichen anführen, weil die wirkliche Ausziehung noch nicht gelehret. Da also

$a:am = b:bm$, so folget, daß

$\sqrt{a}:\sqrt{am} = \sqrt{b}:\sqrt{bm}$, denn

$\sqrt{a}.\sqrt{bm} = \sqrt{am}.\sqrt{b}$.

Weil man auch Potenzen hat, deren Exponent eine Minusgröße, so finden sich auch folgende Proportiones

$a^{-n}:a^{-n}m^{-n} = b^{-n}:b^{-n}m^{-n}$, auch hier ist

$a^{-n}b^{-n}m^{-n} = a^{-n}m^{-n}b^{-n}$.

Es ist aber nach §. 106. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, folglich ist eben gezeigte Proportion auch gleich

$\frac{1}{a^n}:\frac{1}{a^nm^n} = \frac{1}{b^n}:\frac{1}{b^nm^n}$, weil

$\frac{1}{a^n}\cdot\frac{1}{b^nm^n} = \frac{1}{a^nm^n}\cdot\frac{1}{b^n}$, oder

$\frac{1}{a^nb^nm^n} = \frac{1}{a^nm^nb^n}$.

ferner da $\sqrt[n]{a}:\sqrt[n]{am} = \sqrt[n]{b}:\sqrt[n]{bm}$, so ist

$\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{bm} = \sqrt[n]{am}.\sqrt[n]{b}$.

Da auch nach §. 108. $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$, so wäre obige Proportion

$$a^{\frac{1}{n}} : a^{\frac{1}{n}} . m^{\frac{1}{n}} = b^{\frac{1}{n}} : b^{\frac{1}{n}} m^{\frac{1}{n}}, \text{ und}$$

$$a^{\frac{1}{n}} . b^{\frac{1}{n}} m^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}} m^{\frac{1}{n}} b^{\frac{1}{n}}.$$

Wir bemerken aber bey dieser Veränderung der Glieder durch Erhebung zu Potenzen, oder durch Ausziehung der Wurzel, daß eines von beyden mit allen vier Gliedern der Proportion zugleich vorgenommen werden muß, weil es sonst keine Proportion bleibet. Die gezeigten Veränderungen durch die Versetzung der Glieder finden auch hier statt.

§. 195. Es giebt auch zusammengesetzte Verhältnisse; ehe wir aber von solchen reden, bemerken wir noch folgendes:

1) Die Glieder eines Verhältnisses in einer Proportion mit einerley Zahl multipliciret, oder dividiret, ändert die Proportion nicht; da also

$$a : am = b : bm, \text{ so wird auch}$$

$$ac : amc = b : bm, \text{ und}$$

$$\frac{a}{c} : \frac{am}{c} = b : bm.$$

ferner da $a : am = b : bm$, so folget auch, daß

$$a : am = bc : bmc, \text{ und}$$

$$a : am = \frac{b}{c} : \frac{bm}{c}.$$

Der Beweiß hievon ist sehr leicht. Denn

a) kann man nach §. 176. sowohl $a : am$ als $b : bm$ wie Brüche betrachten. Da nun

$a : am$

$a : am = \frac{a}{am}$ und $b : bm = \frac{b}{bm}$, so folget, daß

$$a : am = ac : acm = \frac{a}{am} = \frac{ac}{acm} = \frac{a : c}{am : c} \text{ und}$$

$$b : bm = bc : bmc = \frac{b}{bm} = \frac{bc}{bmc} = \frac{b : c}{bm : c}.$$

b) Sind in allen angeführten Proportionen die Producte der äußern Glieder gleich dem Producte der mittlern Glieder.

2) Wenn drey Glieder einer discreten geometrischen Proportion bekannt, so kann man das vierte fehlende finden. Man hat alsdann nur nöthig das Product der beyden bekannten äußern oder mittlern Glieder durch das dritte gegebene Glied zu dividiren. Z. E.

da $a : am = b : x$

und $amb = ax$, so folget,

daß $\frac{amb}{a} = \frac{ax}{a}$

$bm = x$

oder da $a : am = x : bm$

und $abm = amx$

so ist $\frac{abm}{am} = \frac{amx}{am}$

folglich $b = x$.

Diese gegebene Regel zu Findung des folgenden Gliedes findet auch bey continuirlichen geometri-

trischen Proportionen, wenn in selbigen das erste oder vierte Glied fehlet, statt. Z. E.

$$a : am = am : x$$

$$a^2m^2 = ax$$

$$\frac{a^2m^2}{a} = \frac{ax}{a}$$

$$am^2 = x$$

ferner $x : am = am : am^2$

$$xam^2 = a^2m^2$$

$$\frac{xam^2}{am^2} = \frac{a^2m^2}{am^2}$$

$$x = a.$$

Fehlen hingegen die mittlern Glieder in einer geometrischen continuirlichen Proportion, so müste man aus dem Product der beyden äußern Glieder die Wurzel ziehen. Dieses zeigen wir jetzt nur an, weil die Ausziehung der Wurzel noch nicht gelehret. Es wäre also

$$a : x = x : am^2$$

$$a^2m^2 = x^2$$

$$\sqrt{a^2m^2} = \sqrt{x^2}$$

$$am = x.$$

§. 196. Aus der Vergleichung zwoer geometrischer Proportionen entstehet eine neue Proportion. Diese Vergleichung ist oft nöthig. Wir wollen hier nur die nöthigsten und nothwendigsten Vorfälle davon bemerken.

1) Wenn in zwey gegebenen geometrischen Proportionen die beyden erstern oder die beyden letztern Glieder einander gleich. Z. E.

a:am = b:bm oder 3:9 = 6:18
a:am = c:cm oder 3:9 = 5:15

b:bm = c:cm oder 6:18 = 5:15

ferner a:am = b:bm oder 3:9 = 6:18
c:cm = b:bm oder 5:15 = 6:18

a:am = c:cm oder 3:9 = 5:15.

Aus dieser Art zu schließen, welche in der Kunstsprache ex aequo simpliciter genennet wird, entstehen folgende neue Proportiones

b:bm = c:cm oder 6:18 = 5:15, und
a:am = c:cm oder 3:9 = 5:15.

Der Beweiß, daß beyde wirkliche geometrische Proportionen, zeiget sich nicht nur durch die Gleichheit der Producte der äußern und mittlern Glieder, sondern beruhet auch auf dem Grundsatz: **wenn zwey Dinge einem dritten gleich, so sind sie auch unter einander gleich.** Man kann also auch eines für das andere setzen.

2) In zwey gegebenen geometrischen Proportionen ist das **erste** und **dritte**, oder das **zweyte** und **vierte Glied** einander gleich. Z. E.

a:am = b:bm oder 3:9 = 6:18
a:an = b:bn oder 3:7 = 6:14

am:an = bm:bn oder 9:7 = 18:14

ferner a:am = b:bm oder 3:9 = 6:18
an:am = bn:bm oder 7:9 = 14:18

a:an = b:bn oder 3:7 = 6:14

Die

Die neuen Proportionen, welche wir auf diese Art zu schließen, die den Namen ordinatim ex aequo hat, erhalten, sind

am:an = bm:bn oder 9:7 = 18:14

und a :an = b :bn oder 3:7 = 6:14.

Die Gleichheit der Producte der äußern und mittlern Glieder beweiset ihre Richtigkeit.

3) In zwey gegebenen geometrischen Proportionen sind entweder

a) die beyden äußern Glieder, oder

b) die beyden mittlern Glieder, oder

c) das zweyte und dritte Glied in der einen Proportion, dem ersten und vierten Gliede in der andern Proportion gleich. Z. E.

a) a : am = b : bm oder 3:9 = 6:18

$$a : amn = \frac{b}{n} : bm \text{ oder } 3 : 36 = \frac{6}{4} : 18$$

$$am : amn = \frac{b}{n} : b \text{ oder } 9 : 36 = \frac{6}{4} : 6$$

b) a:am = b:bm oder 3:9 = 6:18

$$amn : am = b : \frac{b}{n} \text{ oder } 36 : 9 = 6 : \frac{6}{4}$$

$$a : amn = bm : \frac{b}{n} \text{ oder } 3 : 36 = \frac{6}{4} : 18$$

c) a : am = b:bm oder 3:9 = 6:18

$$am : amn = \frac{b}{n} : b \text{ oder } 9 : 36 = \frac{6}{4} : 6$$

$$a : amn = \frac{b}{n} : bm \text{ oder } 3 : 36 = \frac{6}{4} : 18$$

Diese

Diese jetzt gezeigte Art zu schließen wird perturbate ex aequo genennet. Alle erhaltene Proportionen sind wahre geometrische Proportionen, weil die Producte der äußern Glieder gleich dem Producte der mittlern Glieder.

§. 197. Durch die Multiplication oder Division gleichnamigter Glieder verschiedener gegebener geometrischen Proportionen mit einander entstehen gleichfalls neue Proportionen. Z. E. da

$$a : am = b : bm \text{ oder } 3 : 9 = 12 : 36$$

und $c : cn = d : dn$ oder $4 : 8 = 7 : 14$, so folget,

daß $ac : amcn = bd : bmdn$ oder $12 : 72 = 84 : 504$

ferner

da $a : am = b : bm$ oder $3 : 9 = 12 : 36$

und $c : cn = d : dn$ oder $4 : 8 = 7 : 14$, so folget,

daß $\frac{a}{c} : \frac{am}{cn} = \frac{b}{d} : \frac{bm}{dn}$ oder $\frac{3}{4} : \frac{9}{8} = \frac{12}{7} : \frac{36}{14}$.

Der schon so oft angeführte Beweiß überzeuget uns auch hier, daß dieses wahre geometrische Proportionen sind.

Sowohl vor als nach vorgenommener Multiplication oder Division kann man mit selbigen alle mögliche Versetzungen der Glieder vornehmen, wenn man nur der gegebenen Vorschrift dabey folget.

§. 198. Es findet sich oft bey zweyen und mehrern Proportionen, deren Glieder mit einander multipliciret werden sollen, daß zwey nichtgleichnamigte Glieder einander gleich sind. Findet sich dieses bey zweyen Proportionen, so verhält sich in der neuen, durch die Multiplication erhal-

te-

tenen Proportion, das erste Glied zum zweyten, wie das dritte Glied der zweyten Proportion zum vierten Gliede der ersten Proportion. Z. E.

a : am = b : bm oder 3 : 4 = 6 : 8
cn : c = bn : b oder 7 : 1 = 42 : 6

acn : amc = bn : bm oder 21 : 4 = 42 : 8

Die neue Proportion wäre eigentlich

acn : amc = bbn : bbm oder 21 : 4 = 6.42 : 8.6.

Da nun nach §. 176. zwey Glieder einer Proportion durch eine Zahl multipliciret oder diviret, die Proportion nicht ändert, so folget, daß

$$(acn : amc = bn : bm) = (acn : amc = \frac{bbn}{b} : \frac{bbm}{b})$$

und $(21 : 4 = 42 : 8) = (21 : 4 = \frac{42.6}{6} : \frac{8.6}{6})$.

Bey jetzt gezeigtem Vorfall, da zwey nichtgleichnamigte Glieder einander gleich, hätte man also nur nöthig, selbige gegen einander auszustreichen, und die übrigen Glieder in die neue Proportion zu setzen. Z. E.

3 : 4 = ✗ : 8
7 : 1 = 42 : ✗

21 : 4 = 42 : 8.

Werden auf diese Art zwey Proportionen im gemeinen Leben zusammengesetzt, um daraus die dritte zu finden, so wird selbige die Regula quinque genennet, weil zu fünf bekannten Größen die sechste gesucht wird. Z. E.

$$\begin{array}{l} 4:3 = 8:\not 6 \\ 1:7 = \not 6:x \\ \hline 4:21 = 8:x \\ \hline 21.8 = 4x \\ \hline 168 = 4x \\ \hline \frac{168}{4} = x \\ \hline 42 = x. \end{array}$$

§. 199. Es können auch in mehrern gegebenen Proportionen sich zwar nichtgleichnamigte, dennoch gleich große Glieder befinden. Z. E.

$$\begin{array}{l} a:b = c:d \text{ oder } 6:8 = 9:\not 12 \\ e:f = d:g \text{ oder } 4:7 = \not 12:\not 21 \\ h:i = g:k \text{ oder } 3:5 = \not 21:35 \\ l:m = k:n \text{ oder } 1:2 = 35:70 \\ \hline aehl:bfim = c:n \text{ oder } 6.4.3.1:8.7.5.2 = 9:70 \\ \hline aehl:bfim = c:n \text{ oder } 72:560 = 9:70 \\ \hline aehl.n = bfim.c \text{ oder } 72.70 = 560.9 \\ \hline aehln = bcfim \text{ oder } 5040 = 5040. \end{array}$$

Hier haben wir die gleich großen, obgleich ungleichnamigten Glieder nach §. 198. ausgestrichen, und dieses Verfahren gründet sich auf eben den daselbst geführten Beweis.

Auf jetzt gezeigte Art zusammengesetzte Verhältnisse, daraus Proportionen entstehen, lehren uns, das Verhältniß zwoer Größen aus den Verhältnissen derer Größen, wovon sie abhangen, zusammen zu setzen. In der Arithmetik wird dieses die **Kettenregel** genennet.

Das zwölfte Kapitel.

Von der Anwendung der geometrischen Proportion im gemeinen Leben.

§. 200. Unzählige Dinge im gemeinen Leben, in der Mathematik, in der Physik ꝛc. können mit einander im gewissen Verhältniß stehen. Die Berechnung aller dergleichen Aufgaben gründet sich auf die jetzt gelehrte Lehre von der Proportion. Es würde wider unsre Absicht seyn, alle Anwendung der Proportion zu zeigen. Die Erklärung der vornehmsten, welche im gemeinen Leben vorkommen, wird hinreichend seyn, die in denen practischen Rechenbüchern angeführte Rechnungsarten zu verstehen.

§. 201. Die einfache **Regula Detri** oder **Regula Trium** ist eine der vornehmsten Anwendung derselben. Selbige lehret aus drey bekannten Gliedern einer geometrischen Proportion das vierte unbekannte zu finden. Alle Aufgaben, in welchen drey Glieder einer geometrischen Proportion befindlich, können durch selbige aufgelöset werden. Ihre Anwendung gehet auf unzählige Dinge. Z. E. zu Bestimmung des Preises einer Waare, Zinse von ausgeliehenem Gelde, Bestimmung des Arbeitslohns, Vergleichung verschiedenes Gewichts oder Münze mit einander ꝛc. Alle angeführte Dinge stehen mit einander in einem Verhältniß.

§. 202. Man theilet diese **Regula Detri in die directa und inversa ein.**

Regula Detri directa ist, wenn in der gegebenen Aufgabe die gleichnamigten Glieder der Proportion sich auf einander beziehen, daß also, wenn das zweyte größer als das erste, alsdenn auch das vierte größer als das dritte werden muß. Z. E. der Preiß von 14 Pfund einer Waare wird gesucht, und es ist bekannt, daß 1 Pfund gleicher Waare 6 mgr. kostet. Da nun hier 14 Pfund größer als 1 Pfund, so folget ganz natürlich, daß der gesuchte Preiß auch größer als 6 mgr. seyn muß.

Regula Detri inversa hingegen ist, wenn in der gegebenen Aufgabe die gleichnamigten Glieder sich nicht auf einander beziehen. Z. E. die Anzahl der Arbeiter, ein Werk in 6 Tagen zu Stande zu bringen, zu finden, wenn bekannt, daß 20 Mann 8 Tage auf dieser Arbeit zubringen. Hier siehet man, daß, da mehr als 20 Arbeiter hiezu erfordert werden, das vierte Glied größer seyn muß als das dritte, obgleich das zweyte kleiner als das erste.

Die sicherste Beurtheilung, durch welche Art der Regula Detri eine gegebene Aufgabe aufzulösen, ist folgende.

Ist die Aufgabe von solcher Beschaffenheit, daß man schließen kann: je größer die Fragezahl, desto größer, je kleiner die Fragezahl, desto kleiner muß in eben dem Verhältniß die gefundene Zahl seyn; so wird selbige durch die **Regula Detri directa** aufgelöset.

Ist hingegen die Aufgabe so beschaffen, daß man schließen muß: je größer die Fragezahl, desto kleiner, je kleiner die Fragezahl, desto größer muß in eben dem Verhältniß die zu findende Zahl seyn; so findet man die Beantwortung durch die **Regula Detri inversa.**

§. 203. Bey der Auflösung einer Aufgabe durch die **Regula Detri directa** haben wir sowohl die Aufsetzung der gegebenen Glieder als die Findung des vierten Gliedes zu bemerken.

Die Aufsetzung geschiehet folgendergestalt. Die gleichnamigten Dinge werden in die beyden ersten Glieder, und zwar wovon die Frage zum zweyten Gliede, das ungleichnamigte der Frage zum dritten Gliede gesetzet. Z. E. wenn 100 Thlr. an Zinse 5 Thlr. geben, was beträgt die Zinse in gleicher Zeit von 500 Thlr.? Da nun in dieser Aufgabe 100 Thlr. und 500 Thlr. gleichnamigte oder **homogene** Glieder, und von 500 Thlr. die Zinse zu wissen verlanget wird, so setzet man

100 Thlr. : 500 Thlr. = 5 Thlr. : x Thlr.

In den gewöhnlichen Rechenbüchern pflegt solches folgendergestalt aufgesetzt zu werden.

100 Thlr. : 5 Thlr. = 500 Thlr. : x Thlr.

Dieses Verfahren gründet sich darauf, daß man die mittlern Glieder einer Proportion auch verwechseln kann. Ohnerachtet beyde Arten einerley Antwort geben, so ist erstere, mathematisch betrachtet, letzterer vorzuziehen.

Da gegenwärtiges Exempel aus drey bekannten Gliedern einer geometrischen Proportion beste-

het, so muß das gesuchte vierte Glied oder x, welches die Antwort der Frage bestimmt, gleich seyn dem Product der beyden mittlern Glieder durch das vordere Glied dividiret. Da also

100 Thlr. : 500 Thlr. = 5 Thlr. : x Thlr.

und 500 Thlr. . 5 Thlr. = 100 Thlr. . x Thlr.

oder 2500 Thlr. = 100 Thlr. . x

so ist 2500 : 100 = x

also 25 = x

Den Beweiß, daß x = 25, finden wir, wenn die nun bekannten vier Glieder in Proportion gesetzet werden, alsdenn die Producte der mittlern und äußern Glieder einander gleich sind.

Da also 100 : 500 = 5 : 25

so folget, daß 100 . 25 = 500 . 5

denn 2500 = 2500.

§. 204. Muß aber die Auflösung der gegebenen Aufgabe nach der §. 202. gezeigten Beurtheilung durch die Regula Detri inversa geschehen, so verkehret man bey dem Aufsatz die vordern Glieder, und setzet von den gleichnamigten das, wovon die Frage, zum ersten, das andre zum zweyten und das ungleichnamigte zum dritten Gliede. Die Berechnung ist übrigens ersterer völlig gleich.

Z. E. wenn der Preiß eines Orhoft Branteswein 28 Thlr. ist, so wird ein Stübchen für 2 Thlr. verkauft; wie viel wird man aber für 2 Thlr. bekommen, wenn das Orhoft 40 Thlr. kostet?

Nach der Beurtheilung siehet man leicht, daß man weniger als ein Stübchen bekommen muß, weil der Einkaufpreiß gestiegen; es würde also unrecht aufgesetzet seyn

28 Thlr.: 40 Thlr. = 1 Stübch.: x Stübch.

sondern es müssen die vordern Glieder verkehret werden; als

40 Thlr.: 28 Thl. = 1 Stübch.: x Stübch.

da nun $28 . 1 = 40 . x$

oder $28 x = 40 x$

so ist $\frac{28}{40} = x$

oder $\frac{28 : 4}{40 : 4} = x$

und $\frac{7}{10} = x$

Der Beweiß hievon ist folgender

weil 40 Thlr.: 28 Thlr. = 1 Stübch.: $\frac{7}{10}$ Stübch.

so muß $28 . 1 = 40 . \frac{7}{10}$

denn $28 = \frac{280}{10}$

da aber $28 = \frac{280 : 10}{10 : 10}$

so ist $28 = 28.$

Bey beyden jetzt gezeigten Arten der Regula Detri sind die gegebene Regeln allgemein, die Glieder mögen aus ganzen Zahlen, ächten oder unächten Brüchen bestehen, wenn man nur die bey

der

der Multiplication und Division der Brüche gegebenen Regeln beobachtet.

§. 205. Bestehen die Glieder der gegebenen Aufgabe auch aus Größen von verschiedener Benennung, so müssen solche, wie bey benamten Zahlen gelehret, zuforderst unter einen Namen gebracht werden. Z. E. 20 Pfund werden mit 7 Thlr. bezahlt, was kosten von gleicher Waare 14 Pfund 13 Loth 2 Quentin? Hier bestehet das zweyte gleichnamigte Glied auch aus Größen einer kleinern Benennung. Es werden also zuerst sowohl 20 Pfund als 14 Pfund 13 Loth zu Quentin gemacht, alsdenn aufgesetzet und berechnet, wie gelehret.

§. 206. Aufgaben, in welchen fünf Größen gegeben, und zu welchen die sechste zu wissen verlangt wird, zu deren Beantwortung wird die Regula quinque erfordert. Es ist selbige bereits §. 198. erkläret.

Z. E. wenn 100 Thlr. in einem Jahre 5 Thlr. Zinse geben, wie viele gleiche Art Zinse werden 1000 Thlr. in 6 Jahren geben? In diesem Exempel sind fünf bekannte Glieder, nemlich 100 Thlr. 1 Jahr, 5 Thlr., 1000 Thlr., 6 Jahr, welche zwey Proportionen ausmachen. Man kann nemlich schließen

100 Thlr. : 1000 Thlr. = 5 Thlr. : x Thlr.
1 Jahr : 6 Jahr = x Thlr. : y Thlr.

Die Auflösung dieser Aufgabe erforderte also keine zweymalige Anwendung der Regula Detri, indem das vierte Glied der erstern Proportion das dritte

Glied der zweyten Proportion geben muß. Verfahren wir aber auch hier nach der §. 198. gegebenen Lehre, so wird uns auch diese Berechnung leicht fallen.

Da also 100 Thlr. : 1000 Thlr. = 5 Thlr. : x Thlr.
und 1 Jahr : 6 Jahr = x Thlr : y Thlr.

so folget, daß 100 . 1 : 1000 . 6 = 5 : y

oder 100 : 6000 = 5 : y

da aber $\frac{100}{100} : \frac{6000}{100} = 5 : y$

und 1 : 60 = 5 : y

so muß 60 . 5 = 1 . y

oder 300 = y

Der Beweiß hievon ist, daß da

1 : 60 = 5 : 300

folglich 60 . 5 = 300 . 1

oder 300 = 300.

§. 207. Es eräugnen sich aber auch oft Vorfälle, da eine Proportion aus der Regula Detri directa, die andre aus der Regula Detri inversa ist. Ist dieses, so wird solches die Regula quinque inversa genennet. Die Aufgaben selbst müssen nach §. 202. gegebener Beurtheilung lehren, zu welcher Art selbige gehörig. Z. E. 100 Thlr. geben jährlich 5 Thlr. Zinse, wie groß muß ein Capital seyn, welches in 4 Jahren 30 Thlr. an obiger Zinse beträgt? Hier kann man schließen:

5 Thlr.

5 Thlr. : 30 Thlr. = 100 Thlr. : x Thlr.
ferner 4 Jahr : 1 Jahr = x Thlr. : y Thlr.

folglich 20 : 30 = 100 : y

oder $\frac{20}{10} : \frac{30}{10}$ = 100 : y

also 2 : 3 = 100 : y

da nun 3 . 100 = 2 . y

und 300 = 2 y

so ist $\frac{300}{2}$ = y

oder 150 = y

denn da 2 : 3 = 100 : 150

und 3 . 100 = 2 . 150

so ist 300 = 300.

In dieser Aufgabe war die zweyte Proportion aus der Regula Detri inversa, deswegen ist in selbiger von denen gleichnamigten Gliedern das zweyte zum ersten gesetzet.

§. 208. Sind die Verhältnisse in der gegebenen Aufgabe aus vielen andern Verhältnissen zusammen gesetzt, wie wir bereits §. 199. gezeiget, so wird deren Auflösung die **Kettenrechnung** oder auch die **Regel multiplex** genennet. Auch hier werden nach Beschaffenheit der Umstände beyde Arten der Regula Detri erfordert. Z. E. was kosten 100 Pfund Braunschweiger Gewicht in Münze, wenn 15 Pfund Hamburger Gewiche

mit $2\frac{3}{4}$ Thlr. Hamburger Bancogeld bezahlet werden, und als gewiß angenommen, daß 100 Thlr. Hamburger Banco gleich 140 Thlr. Gold; ferner 100 Thlr. Gold gleich 102 Thlr. Münze und 83 Braunschw. Pfund gleich 80 Hamburg. Pfund.

In gegenwärtiger Aufgabe sind folgende Proportionen enthalten, als

83 Braunschweig. ℔ : 100 Braunschweig ℔
= 80 Hamb ℔ : x Hamb. ℔.

15 Hamburger ℔ : x Hamburger ℔
= $2\frac{3}{4}$ Hamb. Thlr. : y Hamb. Thlr.

100 Hamburger Thlr. : y Hamburger Thlr.
= 140 Thlr. Gold : z Thlr. Gold.

100 Thaler Gold : z Thaler Gold = 102 Thlr.
Münze : o Thlr. Münze.

welche sämtlich nach der Regula Detri directa zu berechnen.

Die wirkliche Ausrechnung durch eine viermalige Anwendung der Regula Detri würde sehr weitläuftig seyn. Diesem abzuhelfen, hat ein Holländer Namens de Rees eine bequemere Art erfunden, nach solcher werden die gegebene Glieder nicht nur in dergleichen, sondern in allen möglichen Aufgaben, die sich auf Proportion gründen, in zwey Columnen gegen einander aufgesetzet. Die erste Columne gegen die linke Hand enthält die Glieder, deren Product den Divisor und das Product derer in der zwoten Columne befindlichen Glieder den Dividendum giebt.

Bey dem Aufsatz einer Aufgabe nach jetztgenann-

nannter Erfindung erfordert die Wahl der Glieder, welche zum Divisor und Dividendum bestimmt, einige Vorsicht. Die Regel, deren man sich dabey bedienen kann, ist folgende.

Man mache einen verticalen Strich, und setze in die ersten Columne zur linken Hand die Größe, welche der, wovon die Frage an Benennung gleich ist, und gegen über die Wirkung, welche sie hervorbringt. Was dieser an Benennung gleich, wird wieder in die erste Columne gesetzt, und gegenüber wieder ihre Wirkung. Auf solche Weise fähret man fort, bis am Ende der ersten Columne das, was gesucht wird, welches man mit x bezeichnet, und gegenüber die Größe, wovon man x sucht, und welche der Größe, womit der Anfang gemacht, an Benennung gleich, zu stehen kommt. Finden sich alsdenn in beyden Columnen Größen, welche durch einerley Zahl dividiret werden können, so verkleinert man solche. Daß dieses verstattet, beruhet auf den §. 176. angeführten Satz, daß beyde Größen als ein Bruch oder Divisionsexempel zu betrachten. Die Zahlen in jeder Columne werden mit einander multipliciret, und das Product der rechter Hand befindlichen Größen durch das Product der andern Columne dividiret, so giebt der Quotient die gesuchte Größe.

Die Anwendung gegebener Regel wollen wir bey folgenden Arten zeigen.

1) Bey der Regula Detri directa.

20 ℔ kosten 5 Thlr., was kosten 24 ℔?

Da 20 Pfund die Ursache, daß 5 Thlr. bezahlt werden müssen, so ist 5 Thlr. die Wirkung; weil nun von 24 Pfund der Preiß zu wissen verlanget wird, so setzet man also

4 ℔	Thlr. 5
x Thlr.	℔ 24 6

x Thlr. = 6

In beyden Columnen war 20 und 5, weil nun 20 der Divisor und 5 der Dividendus, so kann man solche als $\frac{5}{20}$ betrachten; es ist aber $\frac{5}{20} = \frac{5:5}{20:5} = \frac{1}{4}$, man müste also anstatt 5 Thlr. nur 1 Thlr. setzen, weil aber 1 weder multipliciret noch dividiret, so bleibt solche weg; die 4 aber setzet man anstatt 20. Es sind nun noch in der Columne des Dividendi 24 und des Divisors 4, welche beyde $= \frac{24}{4} = \frac{24:4}{4:4} = \frac{6}{1} = 6$, welche an die Stelle der 24 gesetzt wird. Da nun im Divisor keine andre Größe als 1 geblieben, so bleibt auch 6 ohngeändert, und ist die gesuchte vierte Zahl oder = x.

2) Bey der Regula Detri inversa.

Ein Grabe wird von 6 Mann in 14 Tagen verfertiget, in wie viel Tagen würden 9 Mann einen gleich großen Graben verfertigen.

Hier setzet man zuerst 1 Grabe, weil solches der Größe, wovon man was zu wissen verlangt, an Benennung gleich; gegenüber 6 Mann und 14 Tage, weil selbige zu Verfertigung desselben erforderlich. Unter erstere 1 wird 9 Mann nebst der Frage, welche mit x bezeichnet, und gegenüber wieder 1 Grabe gesetzet, wie nebenstehender Aufsatz zeiget.

1 Grabe

1 Grabe —	Mann 62
39 Mann	Tage 14
x Tage	Grabe 1

$$3x = 14.2$$

$$3x = 28$$

$$x = \frac{28}{3} = 9\frac{1}{3} \text{ Tage.}$$

3) Bey der Regula Quinque.

16 Personen bezahlen in 12 Wochen an Kostgeld 132 Thaler. Wie viel Kostgänger werden erfordert, daß man in 21 Wochen $577\frac{1}{2}$ Thaler bekommt. Also

7 77 732 Thlr.	Wochen 772 6
77 Wochen	Personen 76 8
7 x Pers.	Thlr. $577\frac{7}{7}$ 7758 55 5

$$x = 8.5 = 40.$$

4) Bey der Kettenrechnung.

Wir wollen das §. 208. angeführte Exempel erwählen. Es wurde nemlich der Preiß in Münze von 100 Braunschw. Pfund zu wissen verlangt, da 15 Pfund Hamburger Gewicht von gleicher Waare mit $2\frac{3}{4}$ Thlr. Hamb. Banco bezahlt worden. Die Verhältniß des Gewichts, wie auch des Geldes war folgendergestalt bestimmt; als 83 Braunschw. Pfund waren gleich 80 Hamburger Pfund; 100 Thlr. Hamburger Banco = 140 Thlr. Gold; 100 Thlr. Gold = 102 Thlr. Münze. Man fängt hier den Aufsatz mit Braunschweigischem Gewichte an, weil von selbigem der Preiß zu wissen

ver-

verlangt wird. Gegenüber wird das Hamburger Gewicht, welches ersterm an Größe gleich, gesetzt. Alsdann fängt man wieder jedesmal mit der Größe an, die der, womit man aufgehöret, an Benennung gleich, wie solches beygesetztes Exempel zeiget.

83 ℔ Braunschw.	Hamb. ℔ 80 2
5 75 ℔ Hamb.	Hamb. B. Thlr. $2\frac{3}{4}$ 11
100 Thlr. Hamb. B.	Thlr. Gold 140
100 Thlr. Gold	Thlr. Münze 70 34
4. x Thlr. Münze	℔ Braunschw. 100

5. 83. x = 2. 11. 14. 34

415. x = 10472

$x = \frac{10472}{415} = 25\frac{97}{415}$ Thlr. Münze.

Der Beweiß, daß wir richtig gerechnet, ist folgender:

da 83. 5 : 1 = 2. 11. 14. 34 : $\frac{10472}{415}$

und 415 : 1 = 10472 : $\frac{10472}{415}$

so muß 1. 10472 = 415 . $\frac{10472}{415}$

denn 10472 = 10472.

Einen gleichen Werth in Münze für 100 ℔ Braunschweigisches Gewicht würden wir durch eine viermalige Anwendung der Regula Detri erhalten haben, und nach dieser hätten wir schließen müssen.

83 Brs. ℔ : 100 Brs. ℔ = 80 Hb. ℔ : x Hb. ℔

folglich x Hamb. ℔ = $\frac{100.80}{83} = \frac{8000}{83}$.

ferner

ferner

15 ℔ Hb. : $\frac{8000}{83}$ Hb. ℔ = $\frac{11}{4}$ Hb. Thl. : x Hb. Thl.

folglich x Hb. Thl. = $(\frac{8000}{83} \cdot \frac{11}{4}) : 15 = \frac{88000}{332} \cdot 15$
$= \frac{88000}{4980}$.

ferner

100 Tl. Hb. : $\frac{88000}{4980}$ Tl. Hb. = 140 Tl. G. : x Tl. G.

folgl. x Tl. G. $= (\frac{88000}{4980} \cdot 140) : 100 = \frac{12320000}{4980 \cdot 100}$
$= \frac{12320000}{498000} = \frac{12320000 : 2000}{498000 : 2000} = \frac{6160}{249}$.

ferner

100 Tl. G. : $\frac{6160}{249}$ Tl. G. = 102 Tl. Mz. : x Tl. Mz.

folglich x Tl. Mz. $= (\frac{6160}{249} \cdot 102) : 100 = \frac{628320}{24900}$
$= \frac{628320 : 20}{24900 : 20} = \frac{31416 : 3}{1245 : 3} = \frac{10472}{415}$

und wirklich dividiret, ist $\frac{10472}{415} = 25\frac{97}{415}$ Thaler oder 25 Thaler 5 Gutegroschen $7\frac{13}{15}$ Pfennig.

§. 209. Außer jetzt angeführten Rechnungsarten sind deren noch sehr viele, welche in einigen Anwendungen der Proportion bestehen. Sie erhalten ihren Namen von denen Dingen, worauf sie angewendet werden. Z. E. Interessenrechnung, Zeitrechnung, Gewinn- und Verlustrechnung u. s. w. Der Endzweck dieser Schrift verbietet uns aber, auch nur die ersten Anwendungen von solchen Dingen zu machen. Zum Beschluß dieses Kapitels wollen wir noch ein Beyspiel einer besondern Art von Rechnung zeigen, in welcher ein ganz anderes als das bisher gezeigte Verhältniß befindlich. Es ist solches die Bestimmung des Preises der Diamanten, ohne auf die Dicke, Höhe, Reinigkeit, welche vornemlich mit in Betrachtung kom-

men,

men, die aber nicht hieher gehören, zu sehen. Dieser Preiß richtet sich nicht solchergestalt nach dem Gewicht, daß ein Diamant, der noch mal so schwer als ein anderer, auch noch mal so theuer seyn müste, sondern die Preise verhalten sich, wie die Quadrate des Gewichts.

Die Diamanten werden nach Karath, welches 4 Gran, gewogen. Wenn man also einen Diamant, der 2 Gran wiegt, mit 20 Thaler bezahlte, so würde man bey Bestimmung des Preises eines Diamants, welcher 5 Gran schwer, schliessen müssen.

2^2 Gran : 5^2 Gran = 20 Thlr. : x Thlr.
also 4 Gran : 25 Gran = 20 Thlr. : x Thlr.
folglich $25 \cdot 20 = 4x$
also $500 = 4x$
und $\frac{500}{4} = x$
oder $125 = x$

Es würde also ein Diamant von 5 Gran nach obiger Verhältniß an Werth betragen 125 Thaler.

Das dreyzehnte Kapitel.

Von der geometrischen Progression.

§. 210. **Eine geometrische Progression ist eine Reihe von Zahlen oder Größen, welche immer gleich viel mal größer oder kleiner werden. Erstere wird eine steigende, letztere eine fallende Reihe genennet.**

Beyde

Beyde Arten entstehen, wenn man die beyden letzten Glieder einer geometrischen continuirlichen Proportion zu den ersten Gliedern einer neuen continuirlichen Proportion macht. Es werden sich alsdenn die gefundene Glieder der Proportionen folgendergestalt verhalten: das erste zum zweyten, wie das zweyte zum dritten; und das zweyte zum dritten, wie das dritte zum vierten u. s. w.

§. 211. Der allgemeine Ausdruck einer continuirlichen geometrischen Proportion war nach §. 190. $a : am = am : am^2$.

Es würde also nach diesem eine jede geometrische Progression folgendermaßen entstehen
$a : am = am : am^2$; $am : am^2 = am^2 : am^3$; $am^2 : am^3 = am^3 : am^4$ u. s. w.

Diese erhaltene Glieder a, am, am^2, am^3, am^4 u. s. w. machen eine geometrische Progression aus, weil jedes Glied mit dem Exponenten der Potenz, welcher hier $= m$, multipliciret wird.

Auf diese Art können alle mögliche geometrische Progressionen, sie mögen steigend oder fallend seyn, vorgestellet werden.

§. 212. In einer steigenden Progression muß der Exponent allemal größer als eins, also entweder eine ganze Zahl, oder ein unächter Bruch seyn, denn wäre solcher $= 1$, so blieben die Glieder nach §. 65. ungeändert.

In einer fallenden Progression hingegen ist der Exponent allemal weniger als eins, also ein ächter Bruch.

§. 213. In jedem Gliede einer geometrischen Progression ist allemal der **Exponent** der Potenz **um eins** weniger als die **Zahl** oder **Zeiger** des Gliedes. Z. E. in beygesetzter Progression

1 2 3 4 5

a, am, am^2, am^3, am^4 u. s. w.

Ist der Exponent des 5ten Gliedes $= m^4$, des 4ten Gliedes $= m^3$ u. s. w.

Wenn also die Zahl der Glieder $= n$, so ist allgemein auf alle Fälle der Exponent der Potenz des letzten Gliedes $= n-1$. Der allgemeine Ausdruck für jedes letzte Glied, wenn $a =$ dem ersten Gliede; $n =$ der Zahl der Glieder; $m =$ dem Exponenten der Potenz, würde also seyn am^{n-1}.

§. 214. Das Product zweyer immer gleich weit von beyden Enden abstehender Glieder in einer geometrischen Progression sind sich gleich, also in

a, am, am^2, am^3, u. s. w.

$2, 2.4, 2.4^2, 2.4^3$, u. s. w.

$2, 8, 32, 128$, u. s. w.

ist

$a.am^3 = am.am^2 = a^2m^3$

$2.2.4^3 = 2.4.2.4^2 = 2^2 4^3$

$2.128 = 8.32 = 256.$

Allgemein wäre also das Product zweyer immer gleich weit von beyden Enden abstehender Glieder

$a.am^{n-1} = a^2m^{n-1}$.

§. 215. Diese Betrachtungen geben uns Anweisung, folgenden Aufgaben ein Genüge zu leisten.

1)

1) In einer geometrischen Progression, wenn das erste Glied, der Exponent der Progression, die Zahl der Glieder bekannt, das letzte Glied zu finden.

Z. E. es sey das erste Glied $a = 3$; der Exponent $m = 2$; die Zahl der Glieder $n = 6$: so wird das letzte Glied dieser Progression nach §. 213. seyn $= am^{n-1}$, und in vorgeschriebenen Zahlen wäre

$am^{n-1} = 3.2^{6-1} = 3.2^5 = 3.2.2.2.2.2 = 3.32 = 96$

und die Reihe dieser steigenden Progression wäre alsdenn

3, 6, 12, 24 48, 96.

Oder es sey $a = 2$, $m = \frac{2}{3}$, $n = 7$ so wird das letzte Glied oder $am^{n-1} = 2.\left(\frac{2}{3}\right)^{7-1} = 2.\left(\frac{2}{3}\right)^6$

$= 2.\frac{2^6}{3^6} = 2.\frac{2.2.2.2.2.2}{3.3.3.3.3.3} = 2.\frac{64}{729} = \frac{128}{729}$

und die Reihe dieser fallenden Progression wäre

$2, 1\frac{1}{3}, \frac{8}{9}, \frac{16}{27}, \frac{32}{81}, \frac{64}{243}, \frac{128}{729}$.

2) Aus dem letzten Gliede, der Zahl der Glieder und dem Exponenten das erste Glied einer geometrischen Progression zu finden.

Es sey das letzte Glied, welches nach §. 213. $= am^{n-1}$ hier $= b$.

Da nun außer a im letzten Gliede alles bekannt, so folget, daß

$$\text{da} \quad am^{n-1} = b$$

$$\text{und} \quad \frac{am^{n-1}}{m^{n-1}} = \frac{b}{m^{n-1}}$$

$$\text{also} \quad a = \frac{b}{m^{n-1}}.$$

Es ist also hier das erste Glied oder a gleich dem Quotienten, welcher durch die Division des letzten Gliedes durch den Exponenten, welcher in eine Potenz weniger erhoben als die Zahl der Glieder ist, entstehet.

Wenn also z. E. das letzte Glied $am^{n-1} = 96$; die Zahl der Glieder $n = 6$; der Exponent $m = 2$; so wird das erste Glied oder a

$$= \frac{b}{m^{n-1}} = \frac{96}{2^{6-1}} = \frac{96}{2^5} = \frac{96}{2.2.2.2.2} = \frac{96}{32} = 3.$$

Und die Reihe wäre

3, 6, 12, 24, 48, 96.

3) Aus dem ersten und zweyten Gliede einer geometrischen Progression die folgenden Glieder zu finden.

Der Quotient des zweyten Gliedes durch das erstere Glied dividiret, ist gleich dem Exponenten der Progression; man hat also nur nöthig, mit diesem erhaltenen Quotienten die übrigen folgenden Glieder zu multipliciren. Z. E. die beyden erstern Glieder wären 6, 12. Da nun der Exponent dieser Glieder $= \frac{12}{6} = 2$, so werden die folgenden verlangten Glieder jedesmal mit 2 multipliciret, und aus diesen Producten jenetstehet die verlangte Reihe, als

6, 6.2, 6.2^2, 6.2^3, 6.2^4 .....
6, 12, 24, 48, 96 .....

§. 216. Da der Quotient eines Diviſions-exempels, wenn der Diviſor und Dividendus gleich groß, = 1, ſo kann man jedes erſte Glied einer geometriſchen Progreſſion durch die Diviſion mit ſich ſelbſt zu Eins machen. Setzet man dieſe Diviſion mit allen übrigen Gliedern durch das erſte Glied fort, ſo erhält man eine Reihe, die mit erſterer zwar von einerley Verhältniß iſt, in welcher aber das erſtere Glied = 1 und die übrigen bloß Potenzen des Exponenten enthalten. Z. E.

a, am, am^2, am^3, am^4 ....
dividiret durch a. = 1, m, m^2, m^3, m^4 ....
oder 3, 6, 12, 24, 48 ....
dividiret durch 3 = 1, 2, 4, 8, 16 ....

§. 217. Die Glieder einer geometriſchen Progreſſion können addiret werden. Auf die gewöhnliche Art dieſe Summa zu finden, würde oft ſehr weitläuftig und mühſam ſeyn. Man erhält aber ſolche ſehr leicht, wenn das erſte und letzte Glied und der Exponent bekannt, auf folgende Art.

Das erſte Glied wird mit dem Exponenten, der in die ſo vielſte Potenz, als die Zahl der Glieder zeiget, erhoben worden, multipliciret, von dieſem Product wird das erſte Glied ſubtrahiret und die Differenz durch den Exponenten, von dem man zuvor 1 abgezogen, dividiret, ſo iſt der erhaltene Quotient gleich der Summa der gegebenen Progreſſion.

Allgemein kann diese gegebene Regel zu Ausfindung jeder Summa einer geometrischen Progression angezeiget werden

$$\frac{am^n - a}{m - 1}$$

wo a das erste Glied, m der Exponent und n die Zahl der Glieder ist. Die Art, wie dieser Ausdruck gefunden wird, scheint hier anzuführen zu schwer zu seyn; man sehe hievon das größere Werk, wovon dieses ein Auszug ist, nach.

Folgende Exempel werden die Anwendung obgedachter allgemeinen Regel deutlich zeigen.

1) Bey einer steigenden geometrischen Progression. Z. E. man verlanget die Summa folgender Progression zu wissen, als

2, 4, 8, 16, 32, 64, 128

Der Exponent ist hier nach §. 216. $= \frac{4}{2} = 2$, die Zahl der Glieder $= 7$; das erste Glied $= 2$, folglich die Summa oder $S =$

$$\frac{am^n - a}{m - 1} = \frac{2.2^7 - 2}{2 - 1} = \frac{2.128 - 2}{1} = \frac{256 - 2}{1}$$

$= 254.$

Addiret man obige Reihe auf die gewöhnliche Art, so wird deren Summa der jetzigen völlig gleich seyn.

2) Bey einer fallenden geometrischen Progression sey das erste Glied $a = 5$, die Zahl der Glieder $n = 6$, und der Exponent $m = \frac{2}{7}$, so wird die Summa einer solchen Progression oder

$$\frac{am^n - a}{m-1} = \frac{5\cdot\left(\frac{2}{7}\right)^6 - 5}{\frac{2}{7} - 1} = \frac{5\cdot\frac{2^6}{7^6} - 5}{\frac{2}{7} - \frac{7}{7}}$$

$$= \frac{5.2^6 - 5.7^6}{7^6} : \frac{-5}{7} = \frac{(5.64) - (5.117649)}{117649} : \frac{-5}{7} = \frac{320 - 588245}{117649} : \frac{-5}{7}$$

$$= -\frac{587925}{117649} : \frac{-5}{7} = -\frac{587925}{117649} \cdot \frac{-7}{5} = \frac{117585}{16807}$$

$$= 6\frac{16743}{16807}$$

und die ganze Reihe wäre folgende

$$5, 1\frac{3}{7}, \frac{20}{49}, \frac{40}{343}, \frac{80}{2401}, \frac{160}{16807}.$$

§. 218. Bey einer geometrischen Progression kommen vorzüglich fünf Stücke in Betrachtung.

1) Die Summa = S.
2) Das erste Glied = a.
3) Das letzte Glied = b oder auch am^{n-1}.
4) Der Exponent der Potenz = m.
5) Die Zahl der Glieder = n.

Sind hievon drey bekannt, so lassen sich die übrigen zwey aus denen bekannten bestimmen. Einiger Findung haben wir bereits gelehret, der übrigen Findung aber setzet eine Kenntniß von Logarithmen und Gleichungen zum voraus. Nach deren Erlernung wird es einem jeden auch leicht seyn, die übrigen zu finden.

§. 219. Progressionen können bis ins Unendliche fortgehen. Auch deren Summa ist zu finden, wenn nemlich die Reihe fället, also der Exponent ein ächter Bruch ist, denn alsdann werden die Glieder endlich so klein, daß sie für nichts zu achten. Ist aber der Exponent größer als 1,

so werden die Glieder stets größer, und bey unendlichen Reihen unendlich groß, deren Summa ist nicht zu bestimmen.

§ 220. Die Glieder einer solchen unendlichen Reihe, deren Exponent ein ächter Bruch, haben entweder alle das Pluszeichen, oder die Zeichen wechseln ab.

Haben sie alle das Pluszeichen, so wird die Reihe allgemein also aussehen

$$a + \frac{ab}{c} + \frac{ab^2}{c^2} + \frac{ab^3}{c^3} + \frac{ab^4}{c^4} \text{ u. s. w.}$$

in welcher $a =$ dem ersten Gliede und $\frac{b}{c} =$ dem Exponenten der Potenz, welchen wir zuforderst den Namen m gegeben. Wenn wir nun die Summa dieser Reihe S nennen; so ist

$$S = \frac{ac}{c-b}.$$

Nach jetzt gezeigter Formel ist also die Summa einer unendlichen Progression, deren Glieder alle Plusgrößen, gleich, das erste Glied a multiplicirt mit dem Nenner c des Exponenten $\frac{b}{c}$, und dieses Product ac dividirt durch den Nenner c, wovon der Zähler b abgezogen.

Z. E. es sey das erste Glied $a = 9$, der Exponent $\frac{b}{c} = \frac{1}{8}$, so wird die Summa dieser unendlichen Reihe, deren Glieder nach ersterer Formel alle Plusgrößen, oder

$S =$

$$S = \frac{ac}{c-b} = \frac{9 \cdot 8}{8-1} = \frac{72}{7} = 10\frac{2}{7}$$

und die Reihe wird seyn

$9 + \frac{9}{8} + \frac{9}{64} + \frac{9}{512} + \frac{9}{4096}$ ... bis ins Unendliche.

Wechseln hingegen die Zeichen der Glieder in einer unendlichen Reihe, deren Exponent ein ächter Bruch, ab, so wäre die Reihe allgemein vorgestellet folgende

$$a - \frac{ab}{c} + \frac{ab^2}{c^2} - \frac{ab^3}{c^3} + \frac{ab^4}{c^4} \text{ u. s. w.}$$

und dieser Summa würde seyn

$$S = \frac{ac}{c+b}.$$

Nach dieser allgemeinen Formel bestehet also die Summa einer unendlichen Reihe, deren Exponent ein ächter Bruch, in welcher aber die Zeichen der Glieder abwechseln, aus dem ersten Gliede a mit dem Nenner c des Exponenten $\frac{b}{c}$ multipliciret, und dieses Product ac durch den nemlichen Nenner c, wenn zuvor der Zähler b desselben dazu addiret, dividiret. Z. E. von folgender unendlichen Reihe

$2 - \frac{2}{3} + \frac{2}{9} - \frac{2}{27} + \frac{2}{81}$ ... bis ins Unendliche

wird die Summa oder

$$S = \frac{ac}{c+b} = \frac{2 \cdot 3}{3+2} = \frac{6}{5} = 1\frac{1}{5}.$$

Zum Beschluß dieser Lehre von der geometrischen Progression bemerken wir noch, daß wir mit

Fleiß sowohl die Findung als den Beweiß letzterer beyder angeführter Formeln ausgelassen, weil beydes hier zu schwer. In unserm größern Lehrbuche ist solcher weitläuftig enthalten. Folgende Exempel werden zur Erklärung der vorgetragenen Regeln hinreichend seyn.

Erstes Exempel. 4 Personen sollen eine Summe Geldes unter sich nach folgender Ordnung theilen.

Der erste soll 4000 Thaler, und jeder folgende $\frac{2}{5}$ mal so viel wie der vorhergehende haben. Was beträgt die Summa? und wie viel ist eines jeden Theil?

Hier ist bekannt das erste Glied $a = 4000$

Die Zahl der Glieder $n = 4$,

Der Exponent $m = \frac{2}{5}$.

Es ist also die Summa oder

$$S = \frac{am^n - a}{m-1} = \frac{4000 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^4 - 4000}{\frac{2}{5} - 1}$$

$$= \frac{4000 \cdot \frac{2^4}{5^4} - 4000}{\frac{2}{5} - \frac{5}{5}} = \frac{4000 \cdot \frac{16}{625} - 4000}{-\frac{3}{5}}$$

$$= \frac{64000 - 4000 \cdot 625}{\frac{625}{-\frac{3}{5}}} = \frac{64000 - 2500000}{\frac{625}{-\frac{3}{5}}}$$

$$= -\frac{2436000}{625} : -\frac{3}{5} = -\frac{2436000}{625} \cdot -\frac{5}{3} = \frac{812000}{125}$$

$= 6496$ Thaler.

Und die Glieder der Progression, welche eines jeden Antheil zugleich bestimmen, sind

4000, 1600, 640, 256.

Zwey-

Zweytes Exempel. 4 Personen erhalten eine Summe Geldes, wovon der erste 600 Thaler, der zweyte 694 Thaler erhält, und jedes folgenden Antheil in gleichem Verhältniß stehet; was hat der vierte erhalten? und wie viel ist die Summa?

Da die ersten beyden Glieder bekannt, so ist der fehlende Exponent leicht zu finden; es ist selbiger

$$\frac{694}{600} = 1\frac{94}{600} = 1\frac{94:2}{600:2} = 1\frac{47}{300}$$

also das letzte Glied oder das 4ten Antheil

$$am^{n-1} = 600 \cdot \left(\frac{347}{300}\right)^{4-1} = 600 \cdot \frac{347^3}{300^3}$$

$$= \frac{600.41781923}{27000000} = \frac{41781923}{45000} = 928\frac{21923}{45000}.$$

und die Summa oder

$$S = \frac{am^n - a}{m-1} = 600 \cdot \frac{\frac{347^4}{300^4} - 600}{\frac{347}{300} - 1}$$

$$= \frac{600.14498327281 - 600}{\frac{81000000000}{347 - 300}}$$

$$= \frac{869899636860 - 600.81000000000}{\frac{81000000000}{47}}$$

$$= \frac{38389963686 00.47}{81000000000 \cdot 300} = \frac{38389963686 00.300}{81000000000 \cdot 47}$$

$$= \frac{38389963686 00 \cdot 1}{27000000 \cdot 47} = \frac{38389963686 00}{1269000000 0}$$

$$= \frac{38389963686 00:100}{1269000000 0:100} = \frac{3838996 3686}{12690000}$$

$$= 3025\frac{27 3686}{12690000} \text{ Thaler.}$$

Und die Reihe der Progression ist

600, 694, $802\frac{109}{150}$, $928\frac{21923}{45000}$.

Das

Das vierzehnte Kapitel.

Von der Ausziehung der Wurzeln.

§. 221. Eine jede Größe der Zahl kann als das Product, welches durch die Multiplication der Größe mit sich selbst entstanden, oder als eine Potenz betrachtet werden. Man kann sich also auch die erste Größe, in welcher sie sich vor der Multiplication mit sich selbst befand, nicht nur vorstellen, sondern auch selbige durch Rechnung finden, und diese Rechnungsart wird die Ausziehung der Wurzeln genennet.

§. 222. Die Wurzeln aller Rationalgrößen können genau gefunden werden. Rationalgröße oder Zahl ist eine Größe, welche das wahre Product einer mit sich selbst multiplicirten Zahl oder Größe ist; z. E. 4, 9, 16, sind Rationalgrößen, weil $4 = 2.2$; und $9 = 3.3$; ferner $16 = 4.4$.

§. 223. Die Wurzeln aller Irrationalgrößen kann man aber nicht ohne allen Mangel bestimmen. Irrationalgrößen sind das Gegentheil der erstern, z. E. 1, 2, 3, u. s. w. sind Irrationalgrößen, weil keine Zahl zu finden, die mit sich selbst multipliciret, diesen gleich.

§. 224. Man hat verschiedene Arten von Wurzeln, wovon wir bereits in vorhergehenden Kapiteln einiger ihre Zeichnung und Benennung an-

angeführet haben; so war z. E. $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}} =$ der Quadratwurzel von a, ferner $\sqrt[3]{a^2} = a^{\frac{2}{3}} =$ der Cubicwurzel von a^2 u. s. w.

§. 225. Ehe wir das Verfahren bey Ausziehung der Quadratwurzeln lehren, bemerken wir noch folgendes.

Eine jede Zahl oder Größe, sie sey so groß oder klein als sie immer wolle, kann als die Summa zwoer Größen oder Zahlen betrachtet werden; z. E. $8 = 5 + 3 = 6 + 2$ u. s. w.

Eine jede Zahl oder Größe, welche auf solche Art entstanden, kann also allgemein durch $a + b$ ausgedrückt werden.

Dieser Ausdruck $a + b$ gilt auch für alle mögliche **Rationalwurzeln**. Es bestehet also eine jede Rationalwurzel aus zwey Theilen, welches man **Binomium** nennet. Erheben wir dieses $a + b$ zur zweyten Potenz, also $(a+b)^2 = (a+b).(a+b) = a^2 + 2ab + b^2$, so erhalten wir drey Glieder, wovon das erstere das Quadrat des ersten Gliedes der Wurzel oder $a.a$, das zweyte das Product beyder Theile der Wurzel duplirt oder $ab.2$, das dritte das Quadrat des zweyten Theils der Wurzel oder $b.b$ enthält.

Da nun $a^2 + 2ab + b^2$ durch die Multiplication von $(a+b).(a+b)$ entstanden, so werden wir durch eine Art der Division den $\sqrt{(a^2+2ab+b^2)}$ wieder erhalten.

Dividiren wir nun das erste Glied dieser Grösse oder a^2 durch a also $\frac{a^2}{a}$ so erhalten wir zum Quotienten a als den ersten Theil der Wurzel. Das Product dieses Quotienten mit dem Divisor multipliciret, also $a.a = a^2$, von dem Dividendo a^2 subtrahiret, ist $= o$.

Es sind nun noch folgende zwey Glieder $2ab + b^2$, welche verkürzt $= (2a+b)b$, zu dividiren übrig.

Dieser letztere Ausdruck giebt Anleitung, den noch fehlenden Theil der Wurzel oder b zu finden. Wir sehen nemlich, daß wir nur nöthig haben $2a+b$ durch die Division mit $2a+b$ von b zu trennen. Diesen erforderlichen Divisor erhält man auf folgende Art.

Man dupliret den erhaltenen ersten Theil der Wurzel also $a.2 = 2a$. Dividirten wir hiemit in $2ab$, so würde der Quotient $= b$ werden. Man addiret also zu dem Divisor $2a$ nun noch dieses b, und dividiret wirklich mit der Summa $2a+b$ beyde Glieder $2ab + b^2$, so giebt der neue Quotient b das zweyte Glied der Wurzel. Hierauf das Product $(2a+b)b$ von $2ab+b^2$ subtrahiret, gehet auf. Es ist also $a+b$ die verlangte Quadratwurzel von $a^2+2ab+b^2$ oder $= \sqrt{(a^2+2ab+b^2)} = (a+b)^{\frac{2}{2}}$, wie aus nebengesetzter Berechnung mit mehrern zu ersehen. Als

$$
\begin{array}{l|l}
:a) \quad a^2 + 2ab + b^2 & a + b \\
\quad a^2 & \\
\quad - & \\
\hline
\quad + 2ab + b^2 & \\
:2a + b) \quad + 2ab + b^2 & \\
\quad - \quad - & \\
\hline
\quad 0 \quad 0 &
\end{array}
$$

§. 226. Jetzt gezeigtes Chifret $a^2 + 2ab + b^2$ wollen wir in Zahlen verwandeln; nach solchen würde das Quadrat von 24 oder 24^2, wenn selbiges zuforderst nach dem Binomio in folgende zwey Theile $20 + 4$ getheilet, seyn

$20^2 + 2.20.4 + 4^2 = 20.20 + 2.20.4 + 4.4$
$= 400 + 160 + 16.$

Hieraus würde die Quadratwurzel nach gegebener Anweisung folgendergestalt gezogen

$$
\begin{array}{l|l}
a) \quad a^2 + 2.a.b + b^2 & a + b \\
20) \quad 20^2 + 2.20.4 + 4^2 & 20 + 4 \\
\quad !20^2 & \\
\quad - & \\
\hline
2a + b) \quad 2.a.b + b^2 & \\
2.20 + 4) \quad 2.20.4 + 4^2 & \\
\quad 2.20.4 + 4^2 & \\
\hline
\quad 0 \quad 0 &
\end{array}
$$

Die Wurzel aus 20^2 ist $= \sqrt{20^2} = 20^{\frac{2}{2}}$ $= 20$, ferner $20.20 - 20.20 = 20^2 - 20^2 = 0$; es bleibet also noch $20.2.4 + 4^2$. Der eine Theil der Wurzel, also 20 duplirt, ist 20.2, hiemit das

zweyte

zweyte Glied 2.20.4 dividiret, giebt zum Quotienten +4 als das zweyte Glied der Wurzel; diese zum Divisor 2.20 addirt, giebt zur Summa 2.20+4, welche durch das zweyte Glied der Wurzel 4 multipliciret wird, das Product $2.20.4+4^2$ von dem Dividendo abgezogen, gehet auf; und ist also

$20+4 = \sqrt{(20^2+2.20.4+4^2)} = \sqrt{(400+160+16)} = \sqrt{576}$.

§. 227. Auf jetzt gezeigte Art wird aber niemals eine Zahl zergliedert zur Ausziehung der Wurzel gegeben, sondern sie würde gleich aus der Summa z. E. 576 zu ziehen verlangt werden. Bevor wir aber hiezu eine allgemeine Regel, welche auf alle Fälle passend, geben, bemerken wir noch, daß zu Findung der Quadratwurzeln die Quadrate der einzelnen Zahlzeichen von 1 bis 9 zu wissen nöthig. Durch die Multiplication jeder dieser Größen mit sich selbst können wir selbige leicht finden. In nebengesetztem Täflein sind nicht nur diese Quadrate, sondern auch die Cubi und Biquadrate der einzelnen Zahlzeichen beygefügt. Dieses Täflein wird das Wurzeltäflein genennet und ist folgendes.

Tabellarisch.

Wurzel	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Quadrate	1	4	9	16	25	36	49	64	81
Cubi	1	8	27	64	125	216	343	512	729
Biquadrate	1	16	81	256	625	1296	2401	4096	6561

In gegenwärtiger Tafel finden wir:

1) Ein Quadrat der einzelnen Zahlzeichen enthält nur 2 Zahlzeichen, und zwey davon nur eines.

2) Ein Cubus derselben bestehet zum höchsten aus 3 Zahlzeichen, einige aus zwey oder eins.

3) Ein Biquadrat derselben hat nicht mehr als 4 Zahlzeichen, und einige drey oder zwey.

Hieraus folget, daß man die gegebenen Zahlen in Klassen

1) Bey Ausziehung der Quadratwurzel je zwey und zwey;

2) Bey Ausziehung der Cubicwurzel je drey und drey;

3) Bey Ausziehung der Biquadratwurzel je vier und vier,

und zwar bey allen dreyen Arten von der rechten nach der linken Hand zu eintheile, um die Anzahl der Theile der Wurzel zu wissen, da denn auch vorne nach der linken Hand hin eine Zahl nur bleiben kann, wenn es sich also durch die Abtheilung zuträgt. Den Grund hievon weitläuftig anzuführen, würde wider die Absicht dieser Schrift seyn.

§. 228. Die Regeln, welche bey Ausziehung der Quadratwurzel zu beobachten, sind folgende.

1) Die gegebene Zahl, aus welcher die Quadratwurzel gezogen werden soll, wird in Klassen, jede von zwey Zahlen, von der rechten zur linken Hand, getheilet.

2) In dem angeführten Wurzeltäflein sucht man für die erste Klasse linker Hand unter den Quadraten die Wurzel auf; ist solche nicht völlig darinn zu finden, so nimmt man die am nächsten kleinere. Es ist alsdenn in der vordern Klasse noch etwas von dem doppelten Product der Wurzeln oder von 2ab enthalten.

3) Die gefundene Wurzel oder die dafür angenommene nächst kleinere setzet man in den Quotienten als den ersten Theil der Wurzel oder das a,

mul-

multipliciret sie mit sich selbst, und ziehet dieses Product von der ersten Klasse ab.

4) Dieser erste Theil der Wurzel wird duplicret, und die hinterste Zahl davon setzet man unter die vordere der zweyten Klasse, deren Zahlen man nebst dem Reste von der ersten Klasse herunter gesetzet hat.

Der Grund dieses Untersetzens beruhet darauf, daß auch noch etwas von dem Quadrate des andern Theils mit in dieser Klasse enthalten seyn kann. Giebt das doppelte Product des ersten Theils der Wurzel mehr Zahlen als eine, so werden selbige immer weiter linker Hand gesetzet.

5) Mit diesem doppelten Product, als dem neuen Divisor, wird dividiret; man nehme aber den Quotienten nicht zu groß, das ist der zweyte Theil der Wurzel oder b. Dieser Quotient wird sowohl unter der zweyten Klasse zweyte Zahl, da noch ein Platz ist, neben dem Divisor, als bey dem ersten Theil der Wurzel gesetzt. Multipliciret diese ganze Zahl des Divisors mit dem zweyten Theil der Wurzel, und ziehet dieses Product von der zweyten Klasse ab.

Ist dieses Product alsdann größer als die Zahl in der zweyten Klasse, so ist der Quotient zu groß genommen, und man muß ihn so lange um eins vermindern, bis man das Product abziehen kann. Bleibt alsdenn ein Rest der zweyten Klasse, so setzet man solchen nebst der folgenden Klasse herunter.

6) Die gefundenen Theile von der Wurzel siehet man wieder als den ersten Theil an, dupliret selbigen, setzet seine niedrigste Zifer wieder unter die erste der heruntergesetzten Klasse, die übrigen neben selbige linker Hand, dividiret wieder, setzet den Quotienten sowohl in die Wurzel als neben dem Divisor, und verfähret übrigens nach der fünften Regel, bis alle Klassen geendiget sind.

Auf diese Art wird man die verlangte Quadratwurzel genau erhalten, wenn die gegebene Zahl eine Rationalgröße, also ein wirkliches Quadrat gewesen.

§. 229. Die Anwendung gegebener Regeln wollen wir durch folgende Exempel zeigen.

Erstes Exempel. Es wird die Quadratwurzel aus 1296 zu wissen verlangt.

Nach der ersten Regel geschiehet die Eintheilung dieser Zahl in Klassen also 12|96|

Nach der zweyten Regel sucht man in dem Wurzeltäflein die erste Klasse des Dividendi, also 12, unter den Quadraten auf, da aber solche nicht darinnen enthalten, so nimmt man an deren Statt das Quadrat 9 und deren Wurzel 3, setzet diese in den Quotienten als den ersten Theil der Wurzel $= a$.

Nach der dritten Regel multipliciret man diese 3 mit sich selbst, setzet dieses Product 9, welches $= a^2$, unter die erste Klasse des Dividendi, und ziehet solches von 12 ab, bleiben 3.

Nach der vierten Regel setzet man diesen Rest 3 nebst der folgenden Klasse 96 herunter, und setzet

ßet unter die vorderste Zahl der zwoten Klasse, also unter 9, den erhaltenen ersten Theil der Wurzel, dupliret also 3.2=6 und dividiret mit selbigem.

Nach der fünften Regel in 39. Da nun 39:6=6, so setzet man diese 6 sowohl zum Quotienten bey dem ersten Theil der Wurzel 3, als auch bey dem Divisor 6. Hierauf multipliciret man 66 mit 6, welches = 396, und setzet dieses Product unter die im Dividendo vorhandene 396, subtrahiret selbiges. Da nun 396—396=0, so ist also 36=√1296, wie aus beygesetztem berechnetem Exempel mit mehrerm zu sehen.

	12 96	a+b
a²=(9)		3 6
(2ab+b²)= 3	96	
(2a+b)=(66)		
(2ab+b²)= 396		
000		

Den Beweiß, daß wir gehörig bey der Ausziehung dieser Quadratwurzel verfahren, erhalten wir, wenn das Product der erhaltenen Wurzel mit sich selbst multipliciret, gleich der gegebenen Zahl.

Da nun 36.36=1296, so ist 36=√1296.

In nebengesetztem berechnetem Exempel haben wir den Anfängern zum Besten bey jeder Größe die Gleichheit in Buchstaben aus dem gegebenen allgemeinen Chifret angezeiget, auch über jede Zahl der erhaltenen Wurzel die ihr gleichen Buchstaben bemerket.

Zweytes Exempel. Die Quadratwurzel wird aus 82446400 zu wissen verlangt.

	8ℋ	4ℋ	6ℋ	ØØ	a+b
$a^2 =$	(81)				a+b
$(2ab+b^2) =$	ℐ	4ℋ	6ℋ	ØØ	a+b
$2a =$	(1	8)			
	ℐ	4ℋ	6ℋ	ØØ	
$(2a+b) =$	(18	08)			
$(2a+b^2)$	ℐ	4ℋ	6ℋ		
	Ø	ØØ	ØØ	ØØ	
$(2a+b) =$	(1	81	60)		
	Ø	ØØ	ØØ	ØØ	
	o	oo	oo	oo	

In diesem Exempel war die zweyte Zahl der Wurzel = o, weil bey der zweyten Klasse 14 sich nicht durch 18 theilen ließ. Desgleichen war die letzte Zahl der Wurzel = o, weil der Radix aus o = o. Da nun 9080 . 9080 = 82446400, so ist $9080 = \sqrt{82446400}$.

§. 230. Beyde angeführte Exempel bestanden aus Rationalgrößen, es konnte also ihre Wurzel genau bestimmt werden. Es finden sich aber oft Irrationalgrößen, deren Wurzel gesucht werden soll. Man verfährt hiebey nach erstern Regeln. Da aber bey solchen Größen jedesmal nach geendigter Ausziehung der Wurzel von der letzten Klasse ein Rest bleibt, so werden selbigem so viele Paare Nullen, als man will, angehänget, und die Ausziehung ferner fortgesetzet. Die alsdenn er-

hal-

haltene Quotienten setzet man zu denen erstern erhaltenen Theilen der Wurzel, macht aber zuforderst hinter diese ein Comma, weil die neuen Quotienten keine ganze Zahlen, sondern Decimalbrüche sind. Auf solche Art erhält man durch Näherung die Irrationalwurzeln, da man zwar der wahren Größe sehr nahe kommen kann, ob man sie gleich nicht völlig erreichet. Z. E. so ist die Quadratwurzel aus 4973004287 = √4973004287 = 70519,53 . . . . . wie beygesetzte Berechnung zeiget, als

49	73	00	42	87	70519,53
49)					
73					
(14)					
73	00.				
(14	05)				
70	25				
2	75	42			
(2	41	01)			
2	34.	42.	87		
(14	10	29)			
2	26	02	57		
1	49	2.	0.	0.	
(1	41	03	85)		
1	05	97	02	57	
44.	00	0.	0.		
(14	10	39	03)		
43	97	11	00		
1	75	57	91		

In diesem Exempel haben wir dem Rest der fünften Klasse, nemlich 74926, noch vier Nullen angehänget, und die Ausziehung der Wurzel fortgesetzt. Die hiedurch erhaltene Zahlen 53 sind $= \frac{53}{100}$, es ist also die durch diese Approximation erhaltene Wurzel $= 70519,53$. Je mehr Klassen von Nullen angehänget werden, je genauer würden wir selbige erhalten haben.

§. 231. Bestehet die gegebene Zahl, deren Quadratwurzel zu wissen verlangt wird, aus Zahlen, wobey Decimalbrüche befindlich, so ist das Verfahren dem gezeigten völlig gleich, außer, daß man die ganzen Zahlen, wie gelehret, in Klassen theilet, und hierauf die Decimalbrüche von der linken gegen die rechte Hand eintheilet, bleibet alsdenn zu der letzten Klasse nur eine Zahl, so setzet man an selbige eine Null. Im Quotienten, welcher die Theile der Wurzel enthält, macht man das bereits oft erwähnte Zeichen an den Ort, wo die Einheit aufhöret, welches sich zuträgt, wenn man die Theile der Wurzel aus allen Klassen, welche ganze Zahlen enthalten, erhalten hat. Auch hier kann man bey Irrationalgrößen noch Klassen von Nullen anhängen, wenn man die Wurzel auf das genaueste finden will. Diese Quotienten werden alsdann denen bereits in der erhaltenen Wurzel befindlichen Decimalbrüchen beygefügt; so ist z. E. $\sqrt{32,4} = 5,6920....$ wie folgende Berechnung zeiget.

℔ ℔	℔ ℘	5, 6920	
(25)			
℔	℘.		
(1	06)		
6	36		
℔	℘ ℘.	℘. ℘	
(11	29)		
℔	℘ ℔	℘ ℔	
℔	℔. ℘.	℘. ℘	
(1	13	82)	
℔	℔ ℔	℘ ℘	
11	36	00	
(11	38	40)	
00	0000		
11	36	00	

§. 232. Soll aus einem Bruch die Quadratwurzel gezogen werden, muß solches sowohl aus dem Zähler als Nenner desselben auf die gewöhnliche Art geschehen. Bestehen beyde nur aus einer Irrationalzahl, so hängt man selbiger gleich so viel Paar Nullen an, als man Decimalbrüche der Wurzel verlanget. Will man aber diese Ausziehung der Wurzel nur anzeigen, so muß das Zeichen √ mitten vor den Querstrich des Bruchs gesetzet werden, weil es, wenn es über den Strich, daß nur aus dem Zähler, wenn es aber unter dem Strich, daß nur aus dem Nenner die Wurzel gezogen werden soll, anzeiget. Z. E.

der $\sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{1,732\ldots}{2} = 0,866\ldots$

hingegen der $\sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{1,732\ldots}{4} = 0,432\ldots$

und $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$.

Aus folgendem berechnetem Exempel der Ausziehung der Wurzel des Zählers 3 sehen wir zugleich das Verfahren, aus einer einzelnen ganzen Irrationalzahl die Wurzel zu ziehen; als

3	ø ø	ø ø	ø ø	1,732.....
(1)				
2.	ø.ø			
	(27)			
1	8 9			
11.	ø.ø			
(3	43)			
1	ø 2 9			
17.	ø.ø			
(34	62)			
68	24			
176.				

§. 233. Aus einem Decimalbruch die Quadratwurzel zu ziehen, verfähret man folgendergestalt.

Man macht bey der Null, welche das Zeichen der Einheit ist, eine Klasse, und theilet hierauf von der linken gegen die rechte Hand die Decimalstellen in Klassen; bleibt eine Zahl alsdenn noch übrig, so ergänzet man die fehlende dieser Klasse durch eine Null. In den Quotienten setzet

man

man für die nicht vorhandene ganze Zahl o mit dem Comma. Finden sich alsdenn auch in den Decimalstellen vorne noch Klassen, die aus Nullen bestehen, so setzet man auch für jede derselben in den Quotienten o; übrigens verfährt man, wie gelehret. Man kann auch hier zuletzt, wenn etwa ein Rest bleibt, und die Wurzel genau verlangt wird, nach Gefallen Paare von Nullen anhängen. So wäre z. E.

$\sqrt{0{,}0037} = 0{,}060827\ldots\ldots\ldots$

und $\sqrt{0{,}742} = 0{,}861394\ldots\ldots\ldots$

wie beygefügte Berechnung zeiget.

0 | 00 | ȝ 7̸ | 0,060827
(36)

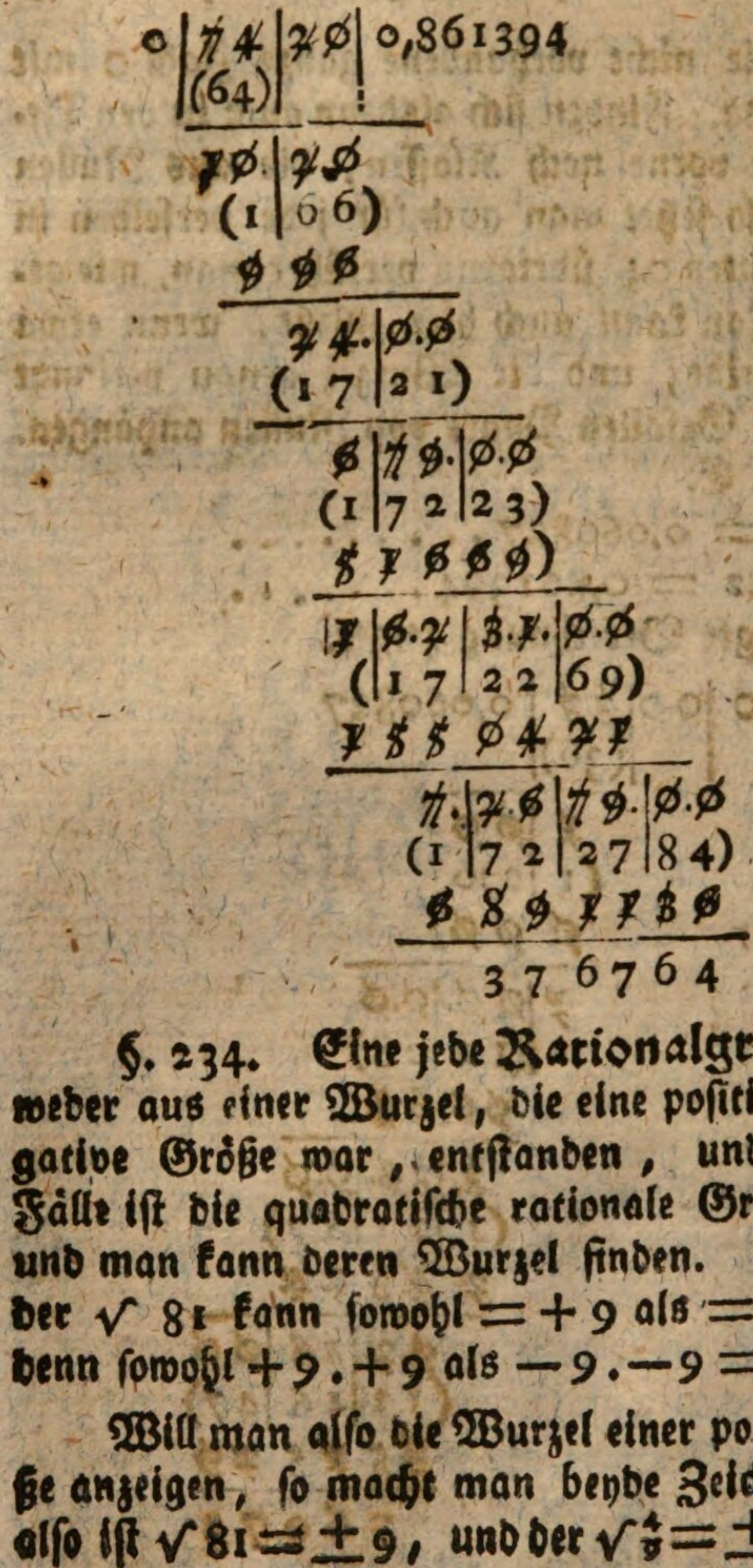
7̸ | ø ø
(1 | 2)0
ø ø ø

7̸ | ø.ø. | ø.ø
(1 2 | 0 8)
ø ø ø ø

ȝ. | ȝ ø. | ø.ø
(1 | 2 1 | 6 2)
7̸ 4̸ ȝ 7̸ 4̸

ø.2̸ | 7̸ ø. | ø.ø
(1 2 | 1 6 | 4 7)
8 5 1 5 2 ø

76.071



§. 234. Eine jede Rationalgröße ist entweder aus einer Wurzel, die eine positive oder negative Größe war, entstanden, und auf beyde Fälle ist die quadratische rationale Größe positiv, und man kann deren Wurzel finden. Z. E. der $\sqrt{81}$ kann sowohl $= +9$ als $= -9$ seyn; denn sowohl $+9 . +9$ als $-9 . -9 = 81$.

Will man also die Wurzel einer positiven Größe anzeigen, so macht man beyde Zeichen davor; also ist $\sqrt{81} = \pm 9$, und der $\sqrt{\frac{4}{9}} = \pm \frac{2}{3}$ u. s. w.

§. 235. Eine jede Rationalgröße, welche aus einem Binomio oder zwey Gliedern bestehet, und zur dritten Potenz erhoben wird, kann allgemein vorgestellet werden

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Da nun diese Größe $= (a+b)^3 = (a+b).(a+b).(a+b)$, so ist deren Wurzel oder erste Potenz $= \sqrt[3]{(a+b)^3} = (a+b)^{\frac{3}{3}} = a+b$, welche wir durch Rechnung auf folgende Art erhalten.

$$\begin{array}{l|l} a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 & a+b \\ a^3 & \\ \hline & \\ \hline 3a^2b + 3ab^2 + b^3 & \\ :3a^2 \quad 3a^2b + 3ab^2 + b^3 & \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 & \end{array}$$

Der erste Theil der Wurzel ist hier $= \sqrt[3]{a^3} = a^{\frac{3}{3}} = a$, dieses cubiret und von dem ersten Gliede des Chifrets abgezogen, ist $= a^3 - a^3 = 0$.

Das zweyte Glied oberwähnten Chifrets oder $3a^2b$ durch das Quadrat des jetzt erhaltenen ersten Theils der Wurzel mit 3 multipliciret, also durch $3a^2$ dividiret, giebt zum Quotienten den noch fehlenden zweyten Theil der Wurzel, also $+b$.

Die Ueberzeugung, daß dieses $+b$ der rechte Theil der verlangten Wurzel sey, erhält man dadurch:

1) Der erste Theil der Wurzel oder a quadrit, dieses $a.a = a^2$ mit dem zweyten Theil der

Wur-

Wurzel oder b multipliciret, und dieses Product a^2b noch mit 3 multiplicirt, ist gleich dem ersten Partialproduct $= 3a^2b$.

2) Der zweyte Theil der Wurzel oder b quadrirt, mit dem ersten Theil der Wurzel oder a desgleichen noch mit 3. Dieses Product multipliciret, giebt zum zweyten Partialproduct $3ab^2$.

3) Der zweyte Theil der Wurzel cubirt, giebt zum dritten Partialproduct $b.b.b = b^3$.

Da nun dieser drey Partialproducte Summa $= 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ = denen dreyen im Chifret vorhandenen Gliedern, so ist das erstere gefundene b = dem erforderlichen zweyten Theil der verlangten Wurzel.

§. 236. Aus diesen jetzt angestellten Betrachtungen cubischer Größen entstehen folgende Regeln, welche bey Ausziehung aller Cubicwurzeln zu beobachten.

1) Die gegebene Zahlen werden nach §. 227 von der rechten gegen die linke Hand in Klassen von drey Zahlen eingetheilet. In der letzten Klasse linker Hand können alsdenn auch zwey, auch nur eine Zahl bleiben, weil es solche nach dem im §. 227 angeführten Wurzeltäflein giebt.

2) In eben erwähntem Täflein sucht man für die erste Klasse der gegebenen Zahl die Cubicwurzel, setzet solche, oder die ihr am nächsten kleinere gefundene, als den ersten Theil der Wurzel zum Quotienten.

3) Dieser gefundene Theil der Wurzel wird cubiret, von der ersten Klasse abgezogen, und der

Rest

Rest mit den übrigen Zahlen der folgenden Klasse herunter gerückt.

4) Der gefundene erstere Theil der Wurzel wird quadrirt, und dieses Quadrat mit 3 multipliciret, und mit diesem Product in den heruntergesetzten Rest dividiret. Diesen Quotienten setzet man als den zweyten Theil der Wurzel bey dem ersten Theil derselben. Man muß aber diesen Quotienten nicht zu groß nehmen, weil man noch drey Partialproducte bekommt, die von dem heruntergesetzten Rest abgezogen werden müssen.

5) Der gefundene zweyte Theil der Wurzel wird mit dem quadrirten ersten Theil derselben, und ferner mit 3 multipliciret.

6) Die geringste Zahl dieses zweyten Partialproducts setzet man unter die mittelste Zahl der zwoten heruntergesetzten Klasse, also eine Zahl weiter rechter Hand, als die geringste Zahl des ersten Partialproducts.

7) Der zweyte Theil der gefundenen Wurzel wird cubiret, und die geringste Zahl dieses dritten Partialproducts wieder eine Stelle weiter rechter Hand oder unter die geringste Zahl der zweyten heruntergesetzten Klasse gesetzet.

8) Diese gesamten Partialproducte werden addiret, und deren Summa von dem heruntergesetzten Rest subtrahiret. Gehet alles gegen einander auf, so ist alsdenn die gegebene Zahl ein wirklicher Cubus, und die Theile der Wurzel sind richtig gefunden. Bleibt ein Rest, so ist es zwar kein völliger Cubus, aber die Differenz ist nicht

= 1, sonst wäre der zweyte Theil der Wurzel zu klein genommen.

9) Sind noch mehrere Klassen vorhanden, so rücket man die folgende auch herunter, siehet die beyden gefundenen Theile der Wurzel als einen Theil an, quadrirt selbige, multipliciret sie mit 3, und dividiret mit diesem Product in den Rest, um das neue b zu finden, und verfähret übrigens nach denen gegebenen Regeln. So wäre z. E.

$\sqrt[3]{340122224}$ nach beygesetzter Rechnung = 324.

	34	0122	2224	324
$a^3 =$	(27)			
	ℳ.	ʃ. ʒ.		
Divisor $3a^2 =$	(2	7)		
Partialproduct $3a^2b =$	5	4		
Partialproduct $3ab^2 =$		36		
Partialproduct $b^3 =$		8		
Summa Partialproduct =	5	68		
Der Rest	7	244	2224	
Neuer Divisor, in welchem $a = 32$ also $3a^2$	(3072)			
Partialproduct $3a^2b =$	1	2288		
Partialproduct $3ab^2 =$		1536		
Partialproduct $b^3 =$			64	
Summa der Partialpr. =	7	244	2224	
Differenz =	0	0000	000	

In beygesetztem Exempel ist nach der ersten Regel die Zahl in Klassen, je drey zu drey Zahlen getheilet.

Nach

Nach der zweyten Regel ist die Cubicwurzel von $34 = 3 = a$ = dem ersten Theil der Wurzel.

Nach der dritten Regel der Cubus von $3 = 3^3 = 27$, von der ersten Klasse $= 34$ abgezogen, und der Rest $34 - 27 = 7$ nebst der folgenden Klasse $= 012$, also 7012 herunter gesetzet; ferner

Nach der vierten Regel der gefundene Theil der Wurzel, also 3 quadrirt mit 3 multipliciret, und mit diesem Product $= 3^2 . 3 = 9 . 3 = 27$ in 70 dividiret, so giebt der Quotient $70 : 27 = 2$ den zweyten Theil der Wurzel.

Nach der fünften, sechsten und siebenden Regel sind die Partialproducte 54, 36, 8 gefunden.

Nach der achten Regel ist die Summa derselben $= 5768$ von dem Reste $= 7012$ abgezogen.

Nach der neunten Regel den erhaltenen Rest $7012 - 5768 = 1244$ nebst der folgenden Klasse $= 224$ herunter gerückt. Den neuen Divisor $= 32^2 . 3 = 3072$ gesucht, und mit selbigem in 12442 dividiret. Die Partialproducte gehörig gesucht, und deren Summe von dem Rest subtrahiret; da nun in gegenwärtigem Exempel beyde gleich gros, also die Differenz $= 0$, so ist

$324 = \sqrt[3]{34012224}$, und

$34012224 = 324^3 = 324 . 324 . 324$.

§. 237. Bleibt ein Rest, so ist solches ein Beweiß, daß die gegebene Größe eine Irrationalgröße, deren Wurzel nicht genau zu finden. Will man aber selbige durch Näherung, so wie bey denen Quadratwurzeln gezeiget, finden, so hänget man dem Rest noch Klassen von Nullen, in wel-

chen aber jede Klasse aus drey Nullen bestehen muß, an, und verfähret, wie gelehret, so giebt dieser neue Quotient noch Decimaltheile der verlangten Wurzel, und zwar noch so viele Theile, als man Klassen von Nullen angehänget.

Es wäre also hiernach der $\sqrt[3]{4972} = 17,1\ldots\ldots$ wie aus beygefügter Berechnung zu ersehen.

		4	972	17,1
$a^3 =$	1			
Divisor		3	97.2	
$3a^2$	=		(3)	
Partialproduct $3a^2b$	=	2	1	
Partialproduct $3ab^2$	=	1	47	
Partialproduct b^3	=		343	
Summa der Partialprod.	=	3	91	3
der Rest	=	5.	9.	0.0.0
$a^3 = 17^3 =$ der neue Divisor	=	(2	8	9)
Partialproduct $3a^2b$	=		289	
Partialproduct $3ab^2$	=		51	
Partialproduct b^3	=			1
Summa der Partialprod.	=		29411	
der Rest	=		29589	u. s. w.

§. 238. Außer jetzt gegebenen Regeln ist bey der Ausziehung der Cubicwurzel noch folgendes zu bemerken:

1) Aus einzelnen Zahlen die Cubicwurzel zu ziehen.

Man hänget selbiger gleich so viel Klassen von Nullen an, als man Wurzeltheile im Decimalbru-

bruche verlanget. Die gegebene Zahl wird zu einer Klasse gerechnet, und in die übrigen jedesmal drey Nullen gesetzet. So wäre z. E.

$\sqrt[3]{5} = 1,709\ldots$

$$a^3 = \begin{array}{r|l} 5 & \not{0}\not{0}\not{0}\,|\,\not{0}\not{0}\not{0}\,|\,\not{0}\not{0}\not{0}\,|\,1,709\ldots \\ (1) & \\ \hline \not{4} & |\not{0}.\not{0}.\not{0} \end{array}$$

Divisor $3a^2 = (3)$

Partialprod. $\begin{cases} 3a^2b = 21 \\ 3ab^2 = 147 \\ b^3 = 343 \end{cases}$

Suma der Partialpr. $= \not{3}\not{9}\not{7}\not{3}$

$$\begin{array}{r|l} & \not{8}\not{7}\,|\,\not{0}\not{0}\not{0} \\ \text{Divisor } 3a^2 = & (8\,6\,|\,7) \\ \hline & 87\,|\,000\,000 \\ \text{Divisor } 3a^2 = & (8\,|\,670\,|\,0) \\ \text{Partialproducte} \begin{cases} 3a^2b = \\ 3ab^2 = \\ b^3 = \end{cases} & \begin{array}{r} 780300. \\ 41310 \\ 729 \end{array} \\ \hline \text{Summa der Partialpr.} = & 78443829 \\ \hline \text{der Rest} = & 8556171 \end{array}$$

2) Aus Zahlen, an welchen sich Decimalbrüche befinden, die Cubicwurzel zu ziehen.

Die ganzen Zahlen werden von der rechten gegen die linke Hand, und die daran befindliche Decimalbrüche von der linken gegen die rechte Hand in Klassen von drey Zahlen getheilet; fehlen alsdenn zu der letzten Klasse der Decimalbrüche noch Zahlen, so hängt man so viel Nullen an, daß in

selbiger sich drey Zahlen befinden; es wäre also z. E. $\sqrt[3]{98,42} = 4,6 \ldots$

	98	420	4,6
$a^3 =$	(64)		
	34	4.2.0	
der Divisor $3a^2 =$	(48)		
Partialproduct $3a^2b =$	288		
Partialproduct $3ab^2 =$	432		
Partialproduct $b^3 =$	216		
Summa der Partialprod. =	3334		
der Rest =	1084		

3) Aus bloßen Decimalbrüchen die Cubicwurzel zu ziehen.

Die Eintheilung geschiehet, wie gelehret, von der linken gegen die rechte Hand, und für den Mangel der Einheit setzet man zum Wurzelquotienten die Null nebst dem Comma. Sind bey denen gegebenen Decimalbrüchen, ehe die Zahlen angehen, einige Stellen mit Nullen bezeichnet, so setzet man nach geschehener Eintheilung in Klassen noch so viele Nullen zum Wurzelquotienten, als hier volle Klassen der Nullen gewesen. Z. E. $\sqrt[3]{0,00073}$

	0,000,	730	0,09
$a^3 =$		729	
der Rest =	1		

4) Aus Brüchen wird die Cubicwurzel entweder aus dem Zähler oder Nenner allein oder aus beyden zugleich gezogen. Ersteres geschiehet, wenn das Zeichen $\sqrt{}$ vor dem Zähler oder Nenner allein

stes-

stehet, als $\sqrt[3]{\frac{3}{4}}$ oder $\sqrt[3]{\frac{3}{4}}$. Letzteres geschiehet, wenn das Zeichen mitten vor dem Bruch stehet, als $\sqrt[3]{\frac{3}{4}}$, welches also $= \frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{4}}$.

§. 239. Aus Brüchen, welche aus Buchstaben zusammen gesetzet, wird die Cubicwurzel auch nach dem gezeigten Chifret gezogen, ist alsdenn die gegebene Größe ein wahrer Cubus, so muß die Wurzel ohne Rest gefunden werden.

Wir halten es für überflüßig, sowohl hievon als der Ausziehung der übrigen Wurzeln, Anweisung und Beyspiele zu geben, weil dieses selten vorkommt, und diese Schrift nur allein denen Anfängern gewidmet.

Zum Beschluß bemerken wir noch, daß die Cubicwurzel einer jeden Größe sowohl eine Plus- als Minusgröße seyn kann, weil der Cubus einer Plusgröße plus, und der Cubus einer Minusgröße wieder minus ist, denn z. E. $3.3.3 = 3^3 = 27$, und $-3.-3.-3 = +9.-3 = -27$. Es ist also $\sqrt[3]{27} = 3$ und $\sqrt[3]{-27} = -3$.

Es lassen sich also auch aus Minusgrößen die Cubicwurzeln ziehen, obgleich solches bey Quadratwurzeln ohnmöglich.

Das funfzehnte Kapitel.

Etliche fernere Betrachtungen von Wurzelgrößen, von Irrationalgrößen und unmöglichen, oder imaginären Größen.

§. 240. **Irrationalgrößen**, deren Wurzel nach §. 223 nicht genau zu finden, kann man oft in etwas von ihrer Irrationalität befreyen. Dieses geschiehet, wenn man solche in Factoren zerfället, deren einer oder etliche eine Rationalgröße ist. Man bedienet sich dieses Vortheils, die Ausziehung der Wurzeln von Irrationalgrößen mit mehrerer Bequemlichkeit zu verrichten. Es gründet sich dieses Verfahren auf folgende Sätze:

1) Der Wehrt einer jeden Größe in Factoren zerfället, bleibt ohngeändert; so ist also z. E. $4824 = 6.4.3.67 = 24.18.7$. u. s. w.

2) Der Wehrt einer jeden Größe wird gleichfalls nicht verändert, wenn man solche zu einer Potenz erhebt, und unter ein dem Potenzexponenten gleichnamigtes Wurzelzeichen setzet. Auch dieses gilt von Größen, von deren eine der $\surd$ nur gegeben, wenn man die übrigen zuerst zu der Potenz erhebet, welche dem Wurzelexponenten gleich, und sie sämtlich unter das Wurzelzeichen setzet. Es ist also

$$a = \surd a^2 = a^{\frac{2}{2}} \text{ und } 9 = \surd 9^2 = 9^{\frac{2}{2}} = \surd 81.$$

ferner

ferner $ab = \sqrt{a^2b^2}$ und $m\sqrt{a} = \sqrt{am^2}$
oder $6.\sqrt{5} = \sqrt{5.6^2} = \sqrt{5.36} = \sqrt{180}$.

3) Man kann auch Größen, welche unter einer Wurzel stehen, öfters ganz oder auch zum Theil von selbigen befreyen; solches geschiehet durch Ausziehung der Wurzel.

a) Wenn die Exponenten der Potenzen gleich dem Wurzelexponenten als $\sqrt[4]{a^4} = a^{\frac{4}{4}} = a$.

b) Wenn die Größen aus Factoren zusammengesetzet, und einiger derselben Potenzexponenten gleich dem Wurzelexponenten. Z. E.
$\sqrt{a^2b} = a^{\frac{2}{2}}b^{\frac{1}{2}} = ab^{\frac{1}{2}} = a\sqrt{b}$.

c) Wenn die Größe aus Zahlen bestehet, die man in rationale Factoren zerfällen kann. Z. E.
$\sqrt{124} = \sqrt{31.4} = 2\sqrt{31}$.

§. 241. Alles jetzt von Befreyung einer Größe von der Irrationalität nur vorläufig gelehrte gründet sich auf die Lehre von Erhebung und Division der Potenzen, und erfordert sehr oft manche Verwandlung, ehe man die gegebene Größe zu dieser Veränderung vorbereitet.

§. 242. Sowohl rationale als irrationale Wurzelgrößen können addiret, subtrahiret, multipliciret und dividiret werden.

Die Addition und Subtraction derselben erfordert nicht nur Wurzeln von einerley Potenzen, sondern auch eine Gleichheit derer hinter dem Wurzelzeichen stehenden Größen; so ist z. E.
$\sqrt{6} + \sqrt{6} = 2\sqrt{6}$ und $\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{9} = 0$; ferner
$\sqrt[4]{8} + 3\sqrt[4]{8} + 2\sqrt[4]{8} = 1 + 3 + 2\sqrt[4]{8} = 6\sqrt[4]{8}$.

oder allgemein $a\sqrt[m]{m^n} + b\sqrt[m]{m^n} = a+b\sqrt[m]{m^n}$. hingegen $\sqrt{8}+\sqrt{6}$ und $\sqrt[3]{8}-\sqrt[3]{6}$ bleiben so stehen, und wird also nur ihre Addition oder Subtraction durch + oder − angezeiget. Im übrigen gelten bey beyden Rechnungsarten die §. 28 und 52 gegebenen allgemeinen Gesetze.

Man addire z. E. $3a\sqrt[3]{b} - 2\sqrt[3]{a} + \sqrt{x} + 9$

und $3a\sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{a} + \sqrt{x} + 8 + \sqrt{y}$

so ist die Summa $6a\sqrt[3]{b} - \sqrt[3]{a} + 2\sqrt{x} + 17 + \sqrt{y}$

oder man addire $2\sqrt[3]{7} + 3\sqrt[3]{9} - 2\sqrt{7} - 9$

und $-2\sqrt[3]{7} + \sqrt[3]{9} - 2\sqrt{7} - 17$

so ist die Summa $= 4\sqrt[3]{9} - 4\sqrt{7} + 8$.

Man subtrahire von $2\sqrt{a} - \sqrt{bc} + fc$

$\sqrt{a} + \sqrt{bc} - \sqrt{ab}$

$- \quad - \quad +$

so ist die Differenz $= \sqrt{a} - 2\sqrt{bc} + fc + \sqrt{ab}$.

§. 243. Bey der Multiplication der Wurzelgrößen bemerken wir folgende Vorfälle:

1) Wurzelgrößen mit andern Größen, sie mögen ganze oder gebrochene Zahlen seyn, zu multipliciren.

Stehen alsdenn vor denen Wurzelgrößen auch Zahlen, so multipliciret man selbige mit der gegebenen Zahl, und setzet das Product zum Factor vor die gegebene Wurzelgröße. Z. E.

$$3\sqrt{7}.6 = 3.6\sqrt{7} = 18\sqrt{7}.$$

Stehen vor denen Wurzelgrößen keine Zahlen, so wird die gegebene Zahl der Factor derselben. Z. E.

$$\sqrt{19}.4 = 4\sqrt{19}$$

Bey beyden Fällen beobachtet man aber auch die in Absicht der Zeichen bey der Multiplication gegebene Regeln; es ist also

$$-3\sqrt{5}.-6=18\sqrt{5}$$

und $-\sqrt{(ab)}.f=-f\sqrt{(ab)}$

2) Wurzelgrößen mit Wurzelgrößen zu multipliciren.

Da diese Multiplication der Wurzelgrößen gleiche Wurzelexponenten erfordert, so müssen die gegebenen Wurzelgrößen, wenn deren Wurzelexponent nicht gleichnamigt, nach §. 154 unter eine Benennung gebracht werden; wenn dieses geschehen, so multipliciret man zuerst die Größen, welche vor dem Wurzelzeichen stehen, und setzet dieses Product zum Factor vor das gegebene Wurzelzeichen; hierauf werden die Größen, welche unter das Wurzelzeichen gehören, oder hinter selbigem stehen, multipliciret, und dieses Product hinter das gegebene Wurzelzeichen gesetzt. Z. E.

$$3\sqrt[3]{4}.-2\sqrt[3]{9}=-3.2\sqrt[3]{4.9}=-6\sqrt[3]{36}$$

und $4\sqrt{a^3}.b\sqrt[3]{m}=4a^{\frac{3}{2}}.b.m^{\frac{1}{3}}=4b.a^{\frac{3.3}{2.3}}.m^{\frac{1.2}{3.2}}$

$=4.b.a^{\frac{9}{6}}.m^{\frac{2}{6}}=4b\sqrt[6]{a^9m^2}$.

Man kann auch hier ofe, wenn es erforderlich, die §. 240 gezeigte Befreyung von den Wurzelzeichen anbringen, oder auch den Factor mit unter das Wurzelzeichen bringen.

Nach diesen Vorbereitungen werden wir vielheitliche Rational- und Irrational-Wurzelgrößen auch sehr leicht multipliciren können. Z. E.

$$\begin{array}{r} 3a\sqrt[3]{m} - 3\sqrt{a} \\ -\ 3a\sqrt[3]{m} + 3\sqrt{a} \\ \hline +\ 9a^{6}\sqrt{m^{2}a^{3}} - 9a \\ -9a^{2}m + 9a^{6}\sqrt{m^{2}a^{3}} \\ \hline -9a^{2}m + 18a^{6}\sqrt{m^{2}a^{3}} - 9a \end{array}$$

ferner

$$\begin{array}{r} \sqrt{3} - \sqrt{12} \\ \sqrt{3} - \sqrt{12} \\ \hline -\sqrt{36} + 12 \\ +3 - \sqrt{36} \\ \hline 3 - 2\sqrt{36} + 12 \\ \hline 3 + 12 - 2\sqrt{36} \\ \hline 15 - 2\sqrt{36} \\ \hline 15 - 2\sqrt{4.9} \\ \hline 15 - 2.2.3 \\ \hline 15 - 12 = 3. \end{array}$$

In diesem lezztern Exempel konnten wir $\sqrt{36}$ in zwey rationale Zahlen 4 und 9 zerfällen, mithin aus beyden den Radix ziehen, es fiel also das Wurzelzeichen völlig weg, und ist dahero

$$(\sqrt{3} - \sqrt{12})^{2} = 3.$$

§. 244. Bey der **Division** der Irrational-Wurzelgrößen ist entweder der Dividendus oder der Divisor, oder es sind beyde zugleich irrationale Wurzelgrößen.

Ist der Dividendus eine Irrationalwurzelgröße, so wird der Divisor nach §. 243 unter das Wurzelzeichen des Dividendi gebracht. Will man

als-

alsdenn wirklich dividiren, so werden beyde Grö. ßen des Dividendi und Divisors in Factoren zer. fället; sind alsdenn in beyden gleichnamigte Grö. ßen befindlich, so kann die Division leicht durch Aufhebung derselben gegen einander geschehen. Z. E.

$$\frac{\sqrt{28}}{6} = \frac{\sqrt{28}}{\sqrt{6^2}} = \sqrt{\frac{28}{36}} = \sqrt{\frac{4.7}{4.9}} = \sqrt{\frac{7}{9}} = \frac{\sqrt{7}}{3}$$

ferner $\frac{\sqrt[3]{14}}{9} = \frac{\sqrt[3]{14}}{\sqrt[3]{9^3}} = \frac{\sqrt[3]{14}}{729}$.

desgleichen $\frac{\sqrt{24}}{-8} = \frac{\sqrt{24}}{-\sqrt{8^2}} = \frac{\sqrt{24}}{-\sqrt{64}} = \frac{\sqrt{6.4}}{-\sqrt{4.16}}$

$$= \frac{\sqrt{6}}{-\sqrt{16}} = \frac{\sqrt{6}}{-\sqrt{4.4}} = \frac{\sqrt{6}}{-4} = -\frac{\sqrt{6.2}}{4.2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Auf gleiche Weise verfähret man, wenn der Divisor eine Irrationalwurzelgröße, außer daß man den Dividendum unter des Divisors Wurzel. zeichen bringet. Z. E.

$$\frac{8}{\sqrt{36}} = \frac{\sqrt{8^2}}{\sqrt{36}} = \sqrt{\frac{64}{36}} = \sqrt{\frac{4.16}{4.9}} = \sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{4}{3}.$$

Sind aber beyde, sowohl der Dividendus als Divisor, Irrationalwurzelgrößen, so sind entwe. der die Exponenten beyder Wurzeln gleichnamigt oder nicht.

Sind selbige gleichnamigt, so wird die Zer. fällung beyder Größen in Factoren gleich zeigen, ob selbige dividiret werden können, oder ob selbige ohnverändert stehen bleiben.

Man kann alsdenn auch, wenn es die Rech. nung erfordert, und es sich thun lässet, beyde oder

eine

eine von den Größen von ihrer Irrationalität befreyen. Z. E.

$$\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{36}} = \frac{\sqrt{4.2}}{\sqrt{4.9}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{9}} = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Sind selbige aber nicht gleichnamigt, so bringet man die Exponenten der Wurzeln, wie bereits oft gezeiget, unter eine Benennung, und verfährt alsdenn, wie gelehret, als

$$\frac{\sqrt[4]{8}}{\sqrt{3}} = \frac{8^{\frac{1}{4}}}{3^{\frac{1}{2}}} = 8^{\frac{1}{4}} : 3^{\frac{1}{2}} = 8^{\frac{1}{4}} : 3^{\frac{1.2}{2.2}} = 8^{\frac{1}{4}} : 3^{\frac{2}{4}}$$

$$= \frac{\sqrt[4]{8}}{\sqrt[4]{3^2}} = \sqrt[4]{\frac{8}{9}}.$$

§. 245. Die Probe der Division geschiehet auch hier durch die Multiplication des Quotienten mit dem Divisor, so wie die Probe der Multiplication durch die Division des Products durch einen der Factoren geschiehet. Ist also bey erstern das Product gleich dem Dividendo, und bey letzterer der Quotient gleich dem andern Factor, so ist bey beyden Rechnungsarten gehörig verfahren. Z. E. es war $\sqrt[4]{8} : \sqrt{3} = \sqrt[4]{\frac{8}{9}}$, folglich muß

$$\sqrt[4]{\frac{8}{9}} \cdot \sqrt{3} = \left(\frac{8}{9}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot 3^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{8}{9}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot 3^{\frac{1.2}{2.2}} = \left(\frac{8}{9}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot 3^{\frac{2}{4}}$$

$$= \sqrt[4]{\frac{8}{9}} \cdot 3^2 = \sqrt[4]{\frac{8}{9}^{2}} = \sqrt[4]{8}.$$

ferner da

$-3\sqrt{5} \cdot -6 = 18\sqrt{5}$, so muß $18\sqrt{5} : -3\sqrt{5}$

$$= \frac{18\sqrt{5}}{-3\sqrt{5}} = -6 \text{ seyn.}$$

§. 246 Unmögliche, imaginaire oder eingebildete Größen sind Wurzeln, die einen ge-

geraden Exponenten haben, und vor negativen Größen stehen.

Sie sind unmöglich, weil keine Größe zu finden, die mit sich selbst multipliciret, eine Minusgröße hervorbringt, denn das Product sowol von plus mit plus als minus mit minus ist allemal plus. Sie bestehen also bloß in der Einbildung, weil man sich wenigstens in Gedanken eine Größe vorstellen kann, welche mit sich selbst multipliciret, diese Zahl hervorgebracht. Es sind also $\sqrt{-4}$, $\sqrt[4]{-6}$, $\sqrt[6]{-9}$ u. s. w. unmögliche Größen.

Hingegen negative Größen, deren Wurzelzeichen einen ungeraden Exponenten haben, sind möglich, weil selbige durch eine oftmalige wiederholte Multiplication einer negativen Größe mit sich selbst entstanden. So sind z. E.
$\sqrt[3]{-8}$, $\sqrt[5]{-243}$, $\sqrt[7]{-a^7}$ u. s. w. mögliche Größen,
denn $-8 = -2 . -2 . -2 = -2^3$,
ferner $-243 = -3 . -3 . -3 . -3 . -3 = -3^5$,
und $-a^7 = -a \ -a . -a \ -a . -a . -a . -a$.

§. 247. Man kann unmögliche Größen zum Theil von ihrer Unmöglichkeit befreyen.

1) Wenn man selbige in Factoren zerfällen kann, aus deren einem die Wurzel zu ziehen. Man siehet alsdenn den Factor, aus welchem die Wurzel zu ziehen, als eine positive Größe an, durch deren Multiplication mit dem andern negativen Factor die unmögliche Größe entstanden; so ist z. E. $\sqrt{-24} = \sqrt{4} . \sqrt{-6} = 2\sqrt{-6}$.

2) Wenn man die gegebene Größe als das Product einer Plusgröße, welche der gegebenen

gleich und mit $\sqrt{-1}$ multipliciret worden, betrachtet. Kann man alsdenn durch Zerfällung in Factoren, und hierauf durch Ausziehung der Wurzel die gegebene Größe verkleinern, so verrichtet man solches, wo nicht, so lässet man solche ungeändert. Auf beyde Fälle bleibt aber von der gegebenen Größe allein $\sqrt{-1}$ eine unmögliche Größe. Z. E.

$\sqrt{-4} = \sqrt{4}.\sqrt{-1} = 2\sqrt{-1}$.

ferner $\sqrt{-7} = \sqrt{7}.\sqrt{-1}$,

und $\sqrt{-12} = \sqrt{12}.\sqrt{-1} = \sqrt{4.3}.\sqrt{-1}$

$= 2\sqrt{3}.\sqrt{-1}$.

§. 248 Die **Addition** und **Subtraction unmöglicher** Größen ist in allen, auch in Absicht der Zeichen, welche vor dem Wurzelzeichen sich befinden können, der bey Irrationalgrößen gezeigten Art völlig gleich.

§. 249. Bey der **Multiplication** derselben aber, bemerken wir folgendes:

1) Das Product zweyer **gleichnamigter unmöglicher** Größen, deren beyder Wurzelzeichen entweder **plus** oder **minus**, wird allemal eine **negative** Größe.

Sind hingegen die Zeichen der Wurzelzeichen verschieden, so wird dieses Product **plus**.

Es haben also die Zeichen hinter dem Wurzelzeichen keinen Einfluß auf die Zeichen des Products, sondern die in Absicht der Zeichen gegebene Regel betrift nur die Zeichen vor dem Wurzelzeichen. Es ist also

$\sqrt{-5}.\sqrt{-5} = -5$

hingegen $-\sqrt{-5}.\sqrt{-5} = 5$.

Denn

Denn $\sqrt{-5} \cdot \sqrt{-5} = \sqrt{5} \cdot \sqrt{-1} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{-1}$
$= \sqrt{25} \cdot -1 = 5 \cdot -1 = -5$
und $-\sqrt{-5} \cdot \sqrt{-5} = -\sqrt{5} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1}$
$= -\sqrt{25} \cdot -1 = -5 \cdot -1 = 5.$

2) Das Product zweyer **ungleichnamigter unmöglicher** Größen wird eine **mögliche** Größe, vor deren Wurzelzeichen **minus** gesetzet wird, wenn nemlich die Zeichen vor beyder Factoren Wurzelzeichen gleich, hingegen wird vor selbiges **plus** gesetzet, wenn letztere verschieden. Z. E.
$\sqrt{-6} \cdot \sqrt{-7} = \sqrt{6} \cdot \sqrt{7} \cdot \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1}$
$= \sqrt{42} \cdot -1 = -\sqrt{42}.$
hingegen
$\sqrt{-6} \cdot -\sqrt{-7} = \sqrt{6} \cdot -\sqrt{7} \cdot \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1}$
$= -\sqrt{42} \cdot -1 = \sqrt{42}.$

Auf beyde gezeigte Arten entstehen also aus unmöglichen mögliche Größen.

3) Das Product, welches durch die Multiplication einer **möglichen** mit einer **unmöglichen** Größe entstehet, ist allemal **unmöglich**, und man kann nur einen Theil derselben nach §. 247 von der Unmöglichkeit befreyen. Z. E.
$\sqrt{2} \cdot \sqrt{-13} = \sqrt{-26} = \sqrt{26} \cdot \sqrt{-1}.$ ferner
$-\sqrt{2} \cdot \sqrt{-13} = -\sqrt{-26} = -\sqrt{26} \cdot \sqrt{-1}.$

§. 250. Die Division geschiehet nach eben denen jetzt bey der Multiplication gegebenen Regeln: so wäre also

$$-5 : \sqrt{-5} = \sqrt{25} : \sqrt{-5} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{-5}} = \sqrt{-5}$$

fern

ferner

$$5 : -\sqrt{-5} = \sqrt{25} : -\sqrt{-5} = \frac{\sqrt{25}}{-\sqrt{-5}} = -\sqrt{-5}$$

ferner $\sqrt{42} : \sqrt{-7} = \frac{\sqrt{42}}{\sqrt{-7}} = \sqrt{-6}$

und $\sqrt{-26} : \sqrt{-13} = \frac{\sqrt{-26}}{\sqrt{-13}} = \sqrt{2}$.

§. 251. Der Nutze, welchen unmögliche Größen in der Rechenkunst leisten, obgleich selbige in Beweisen nicht zu gebrauchen, zeiget sich bey angestellten Untersuchungen solcher Aufgaben, deren Auflösung Möglichkeit nicht zum voraus zu bestimmen. Bekommt man am Ende der Berechnung unmögliche Größen, so beweiset dieses, daß die Aufgabe aufzulösen unmöglich.

§. 252. Zum Beschluß dieser Lehre bemerken wir noch, daß auch oft verlangt wird, aus einer Wurzel die Wurzel zu ziehen. Angezeiget wird so ches $\sqrt{}.\sqrt{}$.

Ist alsdenn die Größe, woraus die Wurzel, welche dichte an selbiger befindlich, gezogen werden soll, **rational**, so hat dieser Ausdruck eigentlich nur ein Wurzelzeichen; so ist z. E.

$\sqrt{}\sqrt{4} = \sqrt{2}$ und $\sqrt{}\sqrt{a^4} = \sqrt{a^2} = a$.

Ist hingegen die Größe irrational, so kann man selbiger leicht nach §. 247 ein einziges Wurzelzeichen verschaffen. Z. E.

$\sqrt{}\sqrt{7} = 7^{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}} = 7^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{7}$

und $\sqrt[3]{}\sqrt{8} = 8^{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}} = 8^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{8}$.

Das

Das sechszehnte Kapitel.

Von den Logarithmen und ihrer Behandlung.

§. 253. **Logarithmen** sind Zahlen einer arithmetischen Progression, welche die Exponenten der Potenz der Glieder einer geometrischen Reihe anzeigen.

So wären z. E. in folgender geometrischen Progression a^0, a^1, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6 . . . . . die Potenzexponenten oder Logarithmen aller Glieder 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 . . . . . .

Man hätte aber auch eine jede andre arithmetische und geometrische Progression nehmen können.

§. 254. Es wird noch erinnerlich seyn, daß sowohl die Multiplication der Potenzen in Addirung ihrer Exponenten, als auch die Division der Potenzen in Subtraction ihrer Potenzexponenten bestehet. Da nun die Logarithmen einer Zahl gleich dem eben so großen Potenzexponenten, so könnte man, wenn die Logarithmen aller Zahlen bekannt wären, durch Hülfe dieser Logarithmen die Multiplication und Division aller Zahlen leicht durch die Addition und Subtraction ihrer Logarithmen verrichten, da denn im erstern Fall die Summa gleich dem Logarithmen des Products gegebener Factoren, und im letztern Fall die Differenz gleich dem Logarithmen des Quotienten wäre.

§. 255. Von 1 bis 101000 sind die Logarithmen gefunden. Von denen Primzahlen oder solchen Zahlen, welche nicht in Factores zu zerfällen, sind solche durch Suchung der mittlern Proportionalzahl zwischen einer geometrischen und arithmetischen Reihe, die übrigen aber, theils durch Addition und Subtraction ersteres nach §. 76 und §. 103 ausfündig gemacht.

Ersteres Geschäfte war mühsam, denn man muste diese Suchung der mittlern geometrischen Proportionalzahl so lange fortsetzen, bis man endlich eine Zahl erhielt, welche der verlangten so nahe kam, daß der Fehler kaum $\frac{1}{100000000}$ betrug. Diese wurde alsdann für die wahre angenommen, dabey man endlich ihren Logarithmen, den man durch die Suchung der mittlern arithmetischen für jedesmalige mittlere geometrische Proportionalzahl gefunden hatte, erhielt.

§. 256. Auf solche Art hat Heinrich Brigg, ein Professor der Geometrie zu Oxford, die Logarithmen der Zahlen von 1 bis 20000, und auch von 90000 bis 100000, und von einem Holländer, Adrian Vlacq, sind selbige von 20000 bis 90000, also von beyden von 1 bis 100000 berechnet. Ersterer bediente sich hiezu auf Anrathen eines Schottländers, Namens Johann Nepper, Baron von Marchiston, welchem einige andere hingegen einem Deutschen, Justus Byrge, die erste Erfindung derselben zuschreiben, folgender

geometrischen Progression 1, 10, 100, 1000,
arithmetischen - - - 0, 1, 2, 3,

welche er aus dem geometrischen Verhältniß 1 : 10 und dem arithmetischen Verhältniß 0—1 herleitete.

Die Logarithmen aller Potenzen der Zehne bestimmte er also in ganzen Zahlen, welche in ihrer natürlichen Ordnung fortgiengen, und bey jeder neuen Potenz um 1 größer wurden.

Die Logarithmen der übrigen Zahlen zwischen 1 und 10, zwischen 10 und 100, zwischen 100 und 1000 u. s. w. bestimmte er durch Decimalbrüche, welche er an die aus Null oder ganzen Zahlen bestehende Logarithmen, welche die Characteristik der Logarithmen heißet, hängte. Er erwählte deswegen Decimalbrüche, weil die Logarithmen der Zahlen zwischen 1 und 10 = einem ächten Bruch, die Logarithmen der Zahlen zwischen 10 und 100 u. s. w. = einem unächten Bruch, und beyde, weil sie Potenzen der Zehne, nicht genau ausgedrückt werden können.

§. 257. Unter denen durch den Druck bekannt gemachten berechneten Logarithmen bedienet man sich zum gewöhnlichen Gebrauch am häufigsten kleiner Tafeln, welche nach verschiedenen Holländischen Ausgaben in Deutschland nachgedruckt sind.

Der mehrsten Einrichtung ist folgende. Sie enthalten zuerst Tafeln der Sinuum, tangentium, secantium nebst ihren Logarithmen, deren Erklärung wir der Lehre der Trigonometrie beyfügen werden.

Hierauf folgen die Tafeln der Logarithmen der natürlichen Zahlzeichen von 1 bis 10000, und zwar ist neben jeder Zahl deren Logarithme mit

8 Zahlzeichen gesetzet, wovon die erste die Characteristik, die übrigen 7 aber Decimalbrüche sind.

Diese Characteristik ist von 1 bis 9 = 0; von 10 bis 99 = 1; von 100 bis 999 = 2; von 1000 bis 9999 = 3 und von 10000 = 4.

§. 258. Die Beschreibung der Einrichtung und des Gebrauchs der großen Tafeln, wovon man verschiedene Ausgaben hat, übergehen wir hier. Durch Hülfe erstgemeldeter kleinen Tafeln kann man sowohl die Logarithmen der darinn befindlichen Zahlen, als auch größerer, und auch umgekehrt, wenn man Logarithmen hat, die Zahl dazu finden. Wir reden aber in diesem Auszuge nur von denen Zahlen und ihren Logarithmen, die wirklich in den kleinen Tafeln sind; wie man aber auch Logarithmen größerer Zahlen dadurch finden soll, davon sehe man das Lehrbuch selbst nach.

§. 259. Wird von einem ächten Bruch der Logarithme verlanget, so sucht man sowohl für den Zähler als Nenner den Logarithmen besonders, setzet solche unter einander, und ziehet den Logarithmen des Zählers von dem Logarithmen des Nenners ab, und giebt der Differenz das Minuszeichen; so ist z. E. der Logarithme von $\frac{3}{5}$ =

Logarithme	3	= 0,4771212
Logarithme	5	= 0,6989700
Logarithme $\frac{3}{5}$		= − 0,2218488

Eben so verfährt man auch, wenn von einem Decimalbruch der Logarithme verlanget wird, wenn man zuforderst selbigen durch untergesetzten ihm ge-

hö-

hörigen Nenner in einen ordinairen Bruch verwandelt. So ist also Logarithme 0,732 =

Logarithme 732 = 2,8645111

Logarithme 1000 = 3.,0.0.0.0.0.0.0

Logarithme 0,732 = — 0,1354889

Wird von einem Bruch, dessen Zähler 1, der Logarithme gesucht, so hat man nur nöthig, den Logarithmen des Nenners zu suchen, und vor selbigen das Minuszeichen zu setzen. Wir bemerken noch:

1) Daß die Characteristik aller Bruchlogarithmen, die zwischen 1 und 0,1 fallen, = 0; die zwischen 0,1 und 0,01 fallen, = — 1 u. s. w. sind, wie folgende Progression zeiget.

0,0001, 0,001, 0,01, 0,1

Character. —4, —3, —2, —1

1, 10, 100, 1000, 10000

Character. 0, 1, 2, 3, 4,

2) Daß die Zahl von einem solchen Logarithmen, vor dem das Minuszeichen stehet, allemal ein Bruch ist, dessen Zähler = 1, und der Nenner, die zu dem Logarithmen in den Tafeln gehörige Zahl. Der Grund hievon liegt darinn, weil die Logarithmen Exponenten der Potenzen, mithin

$a^{-1} = \frac{1}{a}$ u. s. w.

So gehörte z. E. obiger von $\frac{3}{5}$ gefundener Logarithme, welcher = — 0,2218488, zu dem Bruche $1,\overline{666}$, welcher in Decimalbrüche verwandelt,

wenn man aus Bequemlichkeit der Rechnung zuforderst Zähler und Nenner mit 1000 multipliciret, $= \frac{1000}{1666} = 0{,}6 = \frac{6}{10} = \frac{6:2}{10:2} = \frac{3}{5}$ ist.

§. 260. Von einer ganzen Zahl nebst angehängtem ordinairem oder Decimalbruch wird der Logarithme folgendermaßen gefunden.

Man verwandelt beyde Arten in unächte Brüche; erstern durch die Multiplication der ganzen Zahl mit dem Nenner, addiret zu dem Product den Zähler, und setzet unter diese Summa den Nenner. Letzteren durch die Multiplication der Potenzen von 10, welche = der Anzahl der an den ganzen Zahlen befindlichen Decimalbrüchen, und ihm gehörigen untergesetzten Nenner. Hierauf verfährt man nach §. 259. außer daß die Differenz von beyden eine Plusgröße wird. So ist z. E.

Logarithme $1\frac{2}{3}$ = Logar. $\frac{5}{3}$ = Log. 5 = 0,6989700.0
Log. 3 = 0,4771212
0,2218488

und Logarithme 6,273 = Logarithme $\frac{6273}{1000}$ =
Logar. 6273 = 3,8275631
Logar. 1000 = 3,0000000
0,8275631.

§. 261. Die Findung eines gegebenen Logarithmen eigenen natürlichen Zahl geschiehet also.

Man suchet den gegebenen Logarithmen ohne Characteristik unter den Decimalstellen der Logarithmen in den Tafeln unter der Characteristik von 3 auf, findet man solchen alsdenn in allen Decimalstellen dem gegebenen gleich, so ist die darneben ste-

stehende Zahl die ihr eigene natürliche, wenn beyder Characteristik einander gleich. Ist aber die Characteristik des gefundenen größer als des gegebenen, so schneidet man von der gefundenen ihr eigenen natürlichen Zahl so viel Ziffern von der rechten gegen die linke Hand ab, als die Characteristik des gefundenen Logarithmen größer als des gegebenen.

Ist die Characteristik des gefundenen Logarithmen aber kleiner als des gegebenen, so setzet man so viele Nullen hinter die ihr eigene natürliche Zahl, als die Characteristik des gefundenen kleiner als des gegebenen. So ist z. E.

3,7661897 der Logarithme zu der Zahl 5837,
hingegen
0,7661897 der Logarithme zu der Zahl 5,837, und
8,7661897 der Logarithme zu der Zahl 583700000.

§. 262. Zum Beschluß der Lehre von Logarithmen mit Zahlen wollen wir noch deren Gebrauch bey der Multiplication, Division, Erhebung zur Potenz und Ausziehung der Wurzel gegebener Größen zeigen. Z. E.

36 . 82 = Logar. 36 + Logarithme 82. also

Logar. 36 = 1,5563025
Logar. 82 = 1,9138138

Logar. 2952 = 3,4701163

ferner

128 : 4 = Logar. 128 — Logar. 4, also

Logar. 128 = 2,1072100
Logar. 4 = 0,6020600

Logar. 32 = 1,5051500.

ferner

$28^3 = 3$ Logar. $28 = 3 . 1{,}4471580 = 4{,}3414740$

= dem Logarithmen der Zahl 21952. und

$$\sqrt{16} = \text{Logar.} \frac{16}{2} = \frac{1{,}2041200}{2} = 0{,}6020600$$

= dem Logarithmen der Zahl 4.

Man hat also nur nöthig, wenn man die Multiplication oder Division gegebener Größen logarithmisch verrichten will, bey ersterer die Logarithmen der Factoren zu addiren, und bey letzterer die Logarithmen zu subtrahiren.

Bey logarithmischer Erhebung einer Größe zu einer Potenz, oder bey logarithmischer Auszihung einer gegebenen Wurzel wird bey ersterer der Logarithme der gegebenen Größe mit dem Exponenten der Potenz multipliciret, bey letzterer hingegen der Logarithme mit dem Wurzelexponenten dividiret.

§. 263. Auch bey denen geometrischen Proportionen lassen sich die Logarithmen gebrauchen. Z. E. in $80 : 432 = 16 : x$ wäre $x = \frac{432 . 16}{80}$ dieses wäre logarithmisch = (Logar. 432 + Logar. 16) — Logar. 80

also Logar. 432 = 2,6354837
Logar. 16 = 1,2041200

Logar. 6912 = 3.,8396.037
Logar. 80 = 1,9030900

Logar. 86,4 = 1,9365137.

Und eben so viel beträgt auch das Facit nach obiger

ger Berechnung, da $x = \frac{432.16}{80} = \frac{6912}{80} = 86\frac{32}{80}$

$86\frac{32:8}{80:8} = 86\frac{4}{10} = 86{,}4$.

§. 264. Für alle unmögliche Größen sind aber keine Logarithmen vorhanden; es fället also der Ausdruck $l-4$ oder Logarithme -100 gänzlich weg, weil positive Logarithmen für alle positive Zahlen, die größer als 1, die negativen Logarithmen für alle positive Zahlen, die kleiner als 1, aber doch größer als 0, mithin ächte Brüche sind, gehören.

§. 265. In Buchstabenrechnungen drückt man gewöhnlich bey logarithmischen Rechnungen das Wort Logarithme durch den Buchstaben l nur aus, welchen man vor die Größe setzet; so ist also der Logarithme von $a = la$.

Da die Logarithmen Exponenten der Potenzen sind, so werden sie auch hier so behandelt.

Was also die Multiplication, Division, Erhebung zu Potenzen, Ausziehung der Wurzeln betrift, so geschiehet solches auf §. 262 gezeigte Art. So wäre also z. E.

das Product amn logarithmisch ausgedrückt

$$= la + lm + ln$$

ferner $6ax = l6 + la + lx$

$$\text{und } \frac{m}{n} = lm - ln$$

desgleichen $(amb)^2 = (la + lm + lb)2$

$$\text{und } \sqrt{a^2} = \frac{la}{2}, \text{ ferner } a^{\frac{3}{4}} = \frac{3la}{4}$$

$$\text{und } a^{n-m}x^2y^3 = n-mla + 2lx + 3ly.$$

Das siebenzehnte Kapitel.

Von der Combination.

§. 266. Die Lehre von der **Combination** enthält die Vorschriften in sich, wie man Verbindungen und Veränderungen von gegebenen Größen nach verlangten Gesetzen machen soll, und wie vielmal sich dieses bey einer gegebenen Anzahl von Dingen thun lässet. Diese Lehre ist nicht nur von einem sehr weitläuftigen Umfang, sondern lässet sich auch auf unzählige Fälle anwenden. Wir werden aber nur dasjenige davon kürzlich berühren, welches der Absicht dieser Schrift gemäß ist.

§. 267. Zwey Dinge, welche wir allgemein a und b nennen wollen, lassen sich nur in Absicht der Ordnung ihrer Lage zweymal versetzen, als ab und ba.

Drey Dinge hingegen können sechsmal in Absicht ihrer Lage verändert werden, als

abc bac cba
acb bca cab

Denn man konnte hier vor und hinter ab sowohl als ba noch das dritte c setzen, welches also bey jeden drey Dingen sechs Veränderungen giebet.

§. 268. Wenn man so fortfähret 4. 5 und mehrere Dinge also zu verbinden, so kann man endlich folgende Regel daraus extrahiren, welche wir bey dieser Art Bestimmung aller möglichen

Ver-

Verbindungen gegebener Größen zu beobachten haben. Nemlich

Ist die Anzahl der Dinge, welche in Absicht ihrer Lage verändert werden sollen, gegeben, so hat man nur nöthig, so viel auf einander folgende Zahlzeichen, als Dinge sind, von 1 an mit einander zu multipliciren, so giebt deren Product die verlangte Vielheit aller möglichen Versetzungen.

Z. E. wie vielmal können 7 Dinge in Absicht der Ordnung ihrer Lage verändert werden? Solches kann geschehen

$$1.2.3.4.5.6.7 = 5040 \text{ mal.}$$

§. 269. Allgemein kann diese gegebene Regel, wenn n = der Zahl gegebener Dinge, durch folgende Formel ausgedrückt werden.

$$n.n-1.n-2.n-3.n-4 \text{ u. s. w.}$$

bis das letzte Glied = 1, welches endlich geschiehet, wenn n eine wirkliche Zahl.

Wäre also $n=5$, so würde

$$n.n-1.n-2.n-3.n-4 = 5.5-1.5-2.5-3.5-4 = 5.4.3.2.1 = 120.$$

Obgleich hier die Factoren in einer fallenden Reihe stehen, so hindert solches nicht, weil Factores in geänderter Ordnung einerley Product geben.

§. 270. Es kann sich aber auch begeben, daß entweder ein oder mehrere Dinge unter denen gegebenen Größen öfterer als einmal vorkommen. Ist ersteres, so dividiret die nach §. 268 erhaltene Factoren mit so viel Zahlen von 1 an, als die Sache vorkommt. Z. E. die gegebenen Dinge wären aaabc. Wenn selbige alle verschieden wären, so würden solche in ihrer Lage 1.2.3.4.5 = 120 mal

ver-

verändert werden können. Da aber a dreymal darunter befindlich, so wird 1.2.3.4.5 mit 1.2.3 dividiret; es wird also der Quotient der Veränderung ihrer Lage =

$$\frac{1.2.3.4.5}{1.2.3} = 4.5 = 20.$$

Ist aber letzteres, so wiederholet man jetzt gezeigte Division so vielmal als verschiedene Dinge oftmal vorkommen. Z. E. bey aaabb würde 1.2.3.4.5 durch 1.2.3.1.2 dividiret, weil a dreymal und b zweymal darinn vorkommt. Alle mögliche Veränderungen der Lage jetzt gezeigter Größen wäre also

$$\frac{1.2.3.4.5}{1.2.3.1.2} = 2.5 = 10.$$

Daß dieses zutrift, zeiget nebengesetzte Veränderung der Lage.

aaabb	abaab
aabba	baaab
aabab	baaba
abbaa	babaa
ababa	bbaaa.

§. 271. Auch hier kann die gegebene allgemeine Formel gebraucht werden, man hat nur nöthig, unter selbige die jedesmalige erforderliche Divisores zu setzen. Wären also unter den gegebenen Dingen zwey doppelt, so würde

$$\frac{n.n-1.n-2.n-3}{1.2.1.2} \text{ u. s. w.}$$

Wäre eines doppelt $\frac{n.n-1.n-2.n-3}{1.2}$

Käme

Käme eine Sache dreymal vor, so wäre alsdenn der Divisor = 1.2.3.

§. 272. Das Verfahren, aus einer Anzahl gegebener Dinge so viele verschiedene Paare, drey, vier, u. s. w. zu nehmen, welches Combination, Conternation, Conquaternation u. s. w. heißet, übergehen wir ganz, und beziehen uns deshalb auf das größere Buch, wovon dieses ein Auszug ist.

Das achtzehnte Kapitel.

Von den Gleichungen überhaupt, und von den Gleichungen vom ersten Grade und ihrer Auflösung.

§. 273. Eine Gleichung ist ein doppelter Ausdruck einerley Größe, zwischen welchen man das Gleichheitszeichen = zu setzen pflegt; so sind z. E. $6+5=8+3$; $4.8=16.2$ u. s. w. Gleichungen. Denn bey ersterer ist die Summa und bey letzterer das Product beyder Größen einander gleich, obschon der Ausdruck sehr unterschieden.

§. 274. In einer gegebenen Gleichung kann eine unbekannte Größe, welche nach §. 15 mit x, y, z bezeichnet, vorhanden seyn. Diese kann man finden. Den Werth derselben erhalten wir, wenn man, durch oftmalige Veränderung der übrigen bekannten Größen, die unbekannte auf eine Seite allein zu bringen sucht. Diese Veränderung

der

der Gleichung geschiehet durch die gewöhnlichen vier Rechnungsarten, durch Erhebung zu Potenzen, Ausziehung der Wurzeln, durch logarithmische Rechnungen und durch verschiedene andere Kunstgriffe, nachdem es die Umstände erfordern. Bey der Anwendung obgedachter Rechnungsarten muß man aber allemal suchen auf beyden Seiten der Gleichung gleiche Größen zu behalten.

§. 275. Alle Aufgaben, welche durch Gleichungen aufgelöset werden können, sind entweder **bestimmt** oder **unbestimmt**.

Beyder vornehmste Eigenschaft ist, daß, wenn solche **bestimmt**, sich nur eine Antwort auf jede Frage geben lässet; **unbestimmt** hingegen, mehrere Antworten zulassen.

§. 276. In denen Aufgaben ist entweder eine oder mehrere unbekannte Größen vorhanden, die gesucht werden müssen.

Ist ersteres, so hat man zu deren Auflösung nur eine Gleichung nöthig.

Ist letzteres, so werden so viele Gleichungen erfordert, als unbekannte Größen vorhanden.

§. 277. Eine jede in gehörige Ordnung gebrachte Gleichung bekommt nach dem Exponenten der Potenz, in welcher sich die unbekannte Größe befindet, ihren Namen; so ist z. E.

Eine Gleichung vom ersten Grade, wenn die unbekannte Größe $= x$.

Eine Gleichung vom zweyten Grade, wenn die unbekannte Größe $= x^2$.

Eine

Eine Gleichung vom dritten Grade, wenn die unbekannte Größe $= x^3$. u. s. w.

§. 278. Die Auflösung der Gleichungen vom ersten Grade ist die leichteste. Wir bemerken hiebey folgendes.

1) Die unbekannte Größe sey mit einer bekannten durch die Addition verbunden. Z. E.

$$x + 3 = 8$$

Damit man x nach §. 274 allein auf eine Seite bekommt, muß man sowohl von $x + 3$ als auch von 8, die 3 subtrahiren, oder welches einerley zu beyden Größen -3 addiren; es wird also hier

$$\begin{array}{r} x + 3 = 8 \\ -3 = -3 \\ \hline x = 8 - 3 = 5. \end{array}$$

2) Die unbekannte Größe ist mit einer bekannten durch das Minuszeichen verbunden. Z. E.

$$x - 3 = 8$$

Hier wird der Werht von x durch die Addition $+3$ zu beyden Größen bestimmt. Da also

$$\begin{array}{r} x - 3 = 8 \\ \text{und} \quad +3 = +3 \\ \hline \text{so ist} \quad x = 8 + 3 = 11. \end{array}$$

3) Die unbekannte Größe ist durch die Multiplication mit einer bekannten Größe verbunden. Z. E. $4x = 12$.

Die Division beyder Größen durch 4 geben den Wehrt von x. Es ist also

$$x = 12 : 4 = 3.$$

4) Die unbekannte Größe ist durch eine bekannte dividiret, als

$$\frac{x}{3} = 12.$$

Beyde Größen durch 3 multiplicirt, bestimmen den Wehrt von x, welches hier also

$$12.3 = 36.$$

5) Die unbekannte Größe ist der Divisor einer bekannten Größe, als

$$\frac{12}{x} = 4.$$

Hier werden beyde bekannte Größen durch 4 dividiret den Wehrt von x geben, da also

$$\frac{12}{x} = 4$$

$$:4$$

und $\frac{12}{4x} = \frac{4}{4} = 1$

$$.4x$$

so ist $12 = 4x$

$$:4$$

also $\frac{12}{4} = \frac{4x}{4}$

und $3 = x$

6) In der gegebenen Gleichung befinden sich Brüche.

Hier muß man alle Glieder der Gleichung nach gerade mit allen Nennern der Brüche multipliciren; wenn dieses geschehen, so verfährt man,

die

die unbekannte Größe auf eine Seite allein zu bekommen, wie gelehret

3. E.

$$3x + \tfrac{2}{3} - \tfrac{1}{15} = 3 \quad \cdot 3$$

$$9x + 2 - \tfrac{3}{15} = 9 \quad \cdot 15$$

$$135x + 30 - 3 = 135$$

$$+3 = +3$$

$$135x + 30 = 138$$

$$-30 = -30$$

$$135x = 108 \quad :135$$

$$x = \tfrac{108}{135}$$

$$x = \tfrac{108:27}{135:27}$$

$$x = \tfrac{4}{5}.$$

7) In der gegebenen Gleichung ist die unbekannte Größe als der Zähler eines Bruchs befindlich. Man verfährt alsdenn auf erst gezeigte Art.

3. E.

$$\tfrac{x}{4} + \tfrac{2}{5} - \tfrac{3}{20} = 1 \quad \cdot 4$$

$$x + \tfrac{8}{5} - \tfrac{12}{20} = 4 \quad \cdot 5$$

$$5x + 8 - \tfrac{60}{20} = 20 \quad \cdot 20$$

$$100x + 160 - 60 = 400$$

$$+60 = +60$$

$$100x + 160 = 460$$

$$-160 = -160$$

$$100x = 300 \quad :100$$

$$x = 3$$

8) In der gegebenen Gleichung sey aber die unbekannte Größe der Nenner eines Bruchs. Da man durch das jetzt gezeigte Verfahren die unbekannte Größe auf beyden Seiten erhält, so bringet man selbige durch Hülfe entgegengesetzter Zeichen auf eine Seite. Z. E.

$$\frac{3}{x} + \frac{2}{5} - \frac{3}{20} = 1$$

$$\frac{15}{x} + \frac{10}{5} - \frac{15}{20} = 5 \quad .5$$

$$\frac{300}{x} + 40 - 15 = 100 \quad .20$$

$$\frac{300}{x} + 40 = 115 \quad .x$$

$$300 + 40x = 115x$$

$$-40x = -40x$$

$$300 = (115 - 40)x$$

$$300 = 75x \quad :75$$

$$4 = x$$

9) Die unbekannte Größe sey sowohl als Zähler, als Nenner des Bruchs in der gegebenen Gleichung vorhanden. Z. E.

$$\frac{3x+6}{x-2} = 9$$

$$3x+6 = 9x-18 \quad \cdot x-2$$

$$+18 = +18$$

$$3x+24 = 9x$$

$$-3x = -3x$$

$$24 = 6x \quad :6$$

$$4 = x$$

es ist also $\frac{3x+6}{x-2} = \frac{3.4+6}{4-2} = \frac{12+6}{2} = \frac{18}{2} = 9$

10) Die unbekannte Größe sey in mehr als einem Gliede befindlich. Z. E.

$$\frac{1}{2}x + \frac{5}{8}x - 20 = x \quad .2$$

$$x + \frac{10}{8}x - 40 = 2x \quad .8$$

$$8x + 10x - 320 = 16x$$

$$+320 = +320$$

$$8x + 10x = 16x + 320$$

$$-10x = -10x$$

$$8x = 6x + 320$$

$$-6x = -6x$$

$$2x = 320 \quad :2$$

$$x = 160$$

11) Die unbekannte Größe befindet sich in der zweyten Potenz, es bleibet aber dennoch eine

Gleichung vom ersten Grade. Dieses geschiehet, wenn man auf der andern Seite noch ein x hat, oder solches hinbringen und es so einrichten kann, daß, wenn man die Gleichung durch x dividiret, die Potenz wegfällt, ohne daß man ein neues x im Nenner bekommt. Z. E.

$$x^2 = 2x$$

da aber $x^2 = xx$

so ist auch $xx = 2x$

$$;x$$

also $x = 2$

12) In der Gleichung kommen Wurzelzeichen vor. Z. E.

$$\sqrt{(85-x)} = 9.$$

Hier muß man zuerst beyde Größen zur zweyten Potenz erheben, um erstere Größe von dem Wurzelzeichen zu befreyen. Hierauf verfähret man nach ersterer Anweisung also

$$\sqrt{(85-x)} = 9$$

$$\sqrt{(85-x)^2} = 9^2$$

$$(85-x)^{\frac{2}{2}} = 9^2$$

$$85-x = 81$$

$$+x = +x$$

$$85 = 81+x$$

$$-81 = -81$$

$$4 = x$$

13) Die unbekannte Größe ist der Potenzexponent einer Größe. Eine solche Gleichung wird durch

durch Hülfe der Logarithmen, welche wirkliche Potenzexponenten sind, aufgelöset. Z. E.

$$3^x = 6561$$

$$x \text{ Logar. } 3 = \text{Log. } 6561$$

$$x = \frac{\text{Log. } 6561}{\text{Log. } 3}$$

In denen Tafeln ist aber

Logarithme 6561 = 3,8169700

Logarithme 3 = 0,4771212 also

$$\text{Logarithme } \frac{6561}{3} = \frac{3,8169700}{0,4771212} = 8$$

Da nun $x = 8$, so ist $3^x = 3^8 = 6561$.

Es sind zwar in gegenwärtigem Divisionsexempel die hintersten Zahlen des Products von 8.0,47712 12 nicht völlig gleich 3,8169700; solches rühret aber daher, weil die letzten Zahlen des Logarithmen von 3 nicht genau bestimmt, wovon die Ursachen in der Lehre von Logarithmen angeführet.

§. 279. Dieses wären die nöthigsten Bemerkungen von den Gleichungen vom ersten Grade, welche der Absicht dieser Schrift gemäs. Zur Uebung wollen wir noch die Auflösung einiger bestimmter Aufgaben mit Anmerkungen begleitet beyfügen. Zum voraus bemerken wir gleich, daß es bey Auflösung algebraischer Aufgaben vorzüglich auf den Ansatz der Gleichung mit ankommt, wovon sich aber keine Regeln geben lassen, sondern die der gesunde Menschenverstand nach den Umständen selbst finden muß.

Erste Aufgabe.

Die Zahl 80 soll in zwey Theile getheilet werden, davon der größeste Theil um 12 größer als der kleine Theil.

Der zu suchende Theil sey = x. Da nun die Differenz beyder Theile = 12, und die Summa beyder Größen = 80 seyn soll, so wird die Gleichung seyn

$$\begin{array}{rcl} x + x - 12 & = & 80 \\ +12 & = & +12 \\ \hline x + x & = & 92 \\ \hline 2x & = & 92 \\ \hline & & :2 \\ x & = & 46 \end{array}$$

Da also $x = 46$, so wird $x + x - 12 = 46 + 46 - 12 = 46 + 34 = 80$.

Es ist dahero die große Zahl = 46.
und die kleine Zahl = 34.

Zweyte Aufgabe.

1364 Thaler sind unter eine Anzahl Personen vertheilet. Der erstere hat 4 Thaler erhalten, und jedes folgenden Theil ist eine neue Potenz von 4. Wie viel Personen haben also Antheil an der Vertheilung gehabt?

In dieser Aufgabe ist die unbekannte Größe oder die Anzahl der Personen = dem Potenzexponenten von 4. Es ist also die Gleichung

$$4^x = 1364$$

$$x \log. 4 = \log. 1364$$

$$x = \frac{\log. 1364}{\log. 4}$$

Logarithme 1364 = 3,1348144
Logarithme 4 = 0,6020600

also $\frac{3{,}1348144}{6020600} = 5$

Es sind also fünf Personen gewesen, wovon

der erste	4 Thaler
der zweyte	16 Thaler
der dritte	64 Thaler
der vierte	256 Thaler
der fünfte	1024 Thaler

also in Summa 1364 Thaler erhalten haben.

Dritte Aufgabe.

Vier Personen sollen eine gewisse Summe Geldes nach folgender Ordnung unter sich theilen, als

dem erstern ist $\frac{1}{4}$ der ganzen Summa
dem zweyten ist $\frac{1}{3}$ der Summa und noch 600 Thaler
dem dritten ist $\frac{2}{5}$ der Summa weniger 2160 Thaler
dem vierten ist 1900 Thaler bestimmt.

Wie groß ist also die Summa und eines jeden Theil gewesen?

Die Summa sey = x. Es wird also die Gleichung seyn:

$$\frac{x}{4}$$

$$\frac{x}{4} + \frac{x}{3} + 600 + \frac{2x}{5} - 2160 + 1900 = x$$

$$\frac{x}{4} + \frac{x}{3} + \frac{2x}{5} + 600 + 1900 - 2160 = x$$

$$\frac{x}{4} + \frac{x}{3} + \frac{2x}{5} + 2500 - 2160 = x$$

$$\frac{x}{4} + \frac{x}{3} + \frac{2x}{5} + 340 = x \quad .4$$

$$x + \frac{4x}{3} + \frac{8x}{5} + 1360 = 4x \quad .3$$

$$3x + 4x + \frac{24x}{5} + 4080 = 12x \quad .5$$

$$15x + 20x + 24x + 20400 = 60x$$

$$59x + 20400 = 60x$$

$$-59x = -59x$$

$$20400 = x$$

Die Summa des zu vertheilenden Geldes ist also = 20400 Thl., und der Antheil einer jeden Person ist

des erstern $= \frac{x}{4} = \frac{20400}{4} =$ 5100 Thlr.

des zweyten $= \frac{x}{3} + 600 = \frac{20400}{4} + 600 =$ 7400 - -

des dritten $= \frac{2x}{5} - 2160 = \frac{40800}{5} - 2160 =$ 6000 - -

des vierten $=$ 1900 - -

20400 Thlr.

Vierte

Vierte Aufgabe.

400 Thaler werden unter 9 Personen solchergestalt vertheilet, daß der folgende jedesmal 4 Thl. mehr bekommt als der vorhergehende. Was hat ein jeder erhalten?

Der kleinste Theil sey $= x$, es werden also die folgenden seyn

$x, x+4, x+4+4, x+4+4+4$, u. s. w.

Da nun in allen Theilen die Größe jedesmal um die Differenz wächset, so geben diese Theile eine arithmetische Reihe von 9 Gliedern.

Die Summa einer arithmetischen Progression war nach §. 185 $= an + \frac{(n^2-n)d}{2}$

Da nun hier $a = x$, $n = 9$, $d = 4$, so wird die Summa aller Glieder gleich seyn

$$9x + \frac{(81-9)4}{2} = 9x + \frac{72.4}{2} = 9x + 144.$$

Da nun diese Summa, der Aufgabe gemäs, gleich seyn soll 400 Thaler, so wird folgende Gleichung entstehen

$$9x + 144 = 400$$
$$-144 = -144$$
$$9x = 256$$
$$:9$$
$$x = 28\frac{4}{9}.$$

Es bekommt also der erste $28\frac{4}{9}$ Thaler, und der Antheil der übrigen bestehet in folgenden, als $28\frac{4}{9}, 32\frac{4}{9}, 36\frac{4}{9}, 40\frac{4}{9}, 44\frac{4}{9}, 48\frac{4}{9}, 52\frac{4}{9}, 56\frac{4}{9}, 60\frac{4}{9}$.

Addiren wir wirklich diese erhaltene Größen, so werden wir finden, daß deren Summa = 400 Thaler.

Fünfte Aufgabe.

Auf einem Springbrunnen ist die Statue eines Löwen gesetzet, aus dessen beyden Augen, dem Rachen und der rechten vordern Tatze das Wasser in ein darunter befindliches Becken sich ergießet. Läuft das Wasser allein aus dem rechten Auge des Löwen, so wird das Becken in 4 Tagen, aus dem linken Auge in 3 Tagen, durch die rechte vordere Tatze in 2 Tagen und durch den Rachen in $\frac{1}{4}$ Tag gefüllet. Wenn nun aus allen vier Oefnungen zugleich das Wasser fließet; wie lange Zeit wird zur Füllung des Beckens erfordert?

Diese Beantwortung setzet zum voraus, daß uns bekannt, wenn in x Tagen alle Oefnungen das ganze Becken mit Wasser anfüllen, wie viel jede Oefnung in x Tagen hiezu beytrage. Wir finden dieses durch Hülfe der Regula Detri. Wenn also 1 = dem Becken, und x = der gesuchten Tage Zahl, so schließen wir

$$4 : 1 = x : \frac{x}{4}$$

ferner $$3 : 1 = x : \frac{x}{3}$$

ferner $$2 : 1 = x : \frac{x}{2}$$

und $$\frac{x}{4} : 1 = x : 4x;$$

Die

Die Summa aller Röhren Beyträge zur Füllung des ganzen Beckens ist also = 1.

Es wird also die Gleichung seyn

$$4x + \frac{x}{4} + \frac{x}{3} + \frac{x}{2} = 1$$

$$4x + \frac{x}{4} + \frac{x}{3} + \frac{x.2}{2,2} = 1$$

$$4x + \frac{x}{4} + \frac{2x}{4} + \frac{x}{3} = 1$$

$$4x + \frac{3x}{4} + \frac{x}{3} = 1$$

$$\cdot 4$$

$$16x + 3x + \frac{4x}{3} = 4$$

$$\cdot 3$$

$$48x + 9x + 4x = 12$$

$$61x = 12$$

$$: 61$$

$$x = \frac{12}{61}$$

Es wird also $\frac{12}{61}$ Tag oder $\frac{12.24}{61} = \frac{288}{61} = 4\frac{44}{61}$ Stunden zu der Füllung des ganzen Beckens erfordert, wenn aus allen vier Röhren das Wasser zugleich fließet.

Da der Wehrt von x bekannt, so lässet sich nun auch leicht bestimmen, was eine jede Oefnung besonders zu der Füllung beyträgt. Wir erhalten nemlich folgende Proportionen, als

4 : 1

$$4 : 1 = \frac{12}{61} : \frac{3}{61}$$
$$3 : 1 = \frac{12}{61} : \frac{4}{61}$$
$$2 : 1 = \frac{12}{61} : \frac{6}{61}$$
$$\frac{1}{4} : 1 = \frac{12}{61} : \frac{48}{61}$$

Daß solches wahre Proportionen sind, beweiset die völlige Gleichheit der Producte der beyden mittlern und äußern Glieder, da selbige in allen vier Proportionen $= \frac{12}{61}$.

Daß der Aufgabe ein Genüge geleistet, beweiset, weil die Summa der Beyträge aller Oefnungen, welche

$$= \frac{3}{61} + \frac{4}{61} + \frac{6}{61} + \frac{48}{61} = \frac{3+4+6+48}{61} = \frac{61}{61} = 1.$$

Sechste Aufgabe.

Zweyerley Korn, wovon der Himte des besten zu 30 mgr., hingegen des schlechtern zu 24 mgr. verkauft wird, soll solchergestalt vermischet werden, daß ein Himte zu 28 mgr. zu verkaufen. Wie viel muß also von jeder Sorte genommen werden?

Der Zusatz des schlechten zu dem besten Korn sey $= x$, es würde also von dem besten erfordert $1 - x$, und beydes also $x + (1 - x)$ würde $= 1$ Himte seyn. Der Preiß des schlechten Korns ist $= 24$ mgr., folglich $= 24x$. Der Preiß des besten Korns ist $= 30$ mgr., also hier $= (1-x)30 = 30 - 30x$. Der Preiß eines Himten von dem vermischten Korn wäre also $= 24x + 30 - 30x$. Da nun dieses gleich seyn soll 28 mgr., so entstehet folgende Gleichung:

24x

$$24x + 30 - 30x = 28$$
$$+30x = +30x$$
$$24x + 30 = 28 + 30x$$
$$-28 \quad -28$$
$$24x + 2 = 30x$$
$$-24x \quad -24x$$
$$2 = 6x$$
$$:6$$
$$\frac{2}{6} = x$$

Es muß also von dem schlechten Korn $\frac{2}{6}$ Himte oder $\frac{2}{6}:\frac{2}{2} = \frac{1}{3}$ Himte, und von dem besten hingegen $\frac{2}{3}$ Himte genommen werden, wenn ein Himte vermischtes Korn zu 28 mgr. verkauft werden soll.

Der Preiß von $\frac{2}{3}$ Himten des besten Korns ist nach obiger Angabe $= 20$ mgr.
und $\frac{1}{3}$ Himte des schlechten $= 8$ mgr.

also der Preiß von einem Himt. vermischt. $= 28$ mgr.

Allgemein hätte gegenwärtiger Aufgabe Auflösung, wenn $24 = a$, $30 = b$, $28 = c$, $x = x$, also vorgestellet werden können.

$$ax + b - bx = c \quad x$$
$$ax - bx = c - b$$
$$(a-b)x = c - b$$
$$:(a-b)$$
$$x = \frac{c-b}{a-b}$$

Und dieses ist die allgemeine Formel für die in denen Rechenbüchern genannte Alligationsregel, welche bey allen Arten von Vermischungen zu gebrauchen. §. 280.

§. 280. Bey der Auflösung der bisher gegebenen Aufgaben ist allemal die Antwort auch in Absicht der Zeichen unserer Erwartung gemäß gewesen.

Es kommen aber auch Aufgaben vor, wo solches nicht erfolget. Ist man alsdenn von der Richtigkeit des Rechnen überzeuget, so liegt die Schuld allein darinn, daß die Aufgabe unter denen gegebenen Bedingungen ohnmöglich sey.

Z. E. 32 soll in zwey ungleiche Theile getheilet werden, wovon die Summa des Quotienten, wenn des größern Theils durch 8 und des kleinern durch 6 dividiret worden, = 4.

Der größere Theil sey = x, es ist also der kleinere Theil = 32 — x. Da nun der größere Theil durch 8 und der kleinere durch 6 getheilet, beyder Quotienten Summa = 4 seyn soll, so entstehet folgende Gleichung:

$$\frac{x}{8} + \frac{32-x}{6} = 4$$

$$\text{———————————} .8$$

$$x + \frac{256-8x}{6} = 32$$

$$\text{———————————} .6$$

$$6x + 256-8x = 192$$

$$+8x = +8x$$

$$\text{———————————}$$

$$6x + 256 = 192 + 8x$$

$$-6x \qquad -6x$$

$$\text{———————————}$$

$$2.5.6 = 192 + 2x$$

$$-192 = -192$$

$$\text{———————————}$$

$$64 = 2x$$

$$\text{———————————} :2$$

$$32 = x$$

Es wäre also die große Zahl = 32; da nun die kleine 32 — x, so wäre solche = 32 — 32 = 0, folglich gar keine Zahl, es soll aber eine da seyn. Die Aufgabe ist also auf diese gegebene Art unmöglich.

Wäre hingegen die zu der Theilung gegebene Zahl = 36, so würde nach erstern Bedingungen $\frac{x}{8} = \frac{48}{8}$, mithin die kleinere Zahl $= \frac{36-48}{6} = -\frac{12}{6}$ und beyder Quotienten Summa = 4 seyn,

denn $\frac{48}{8} + \frac{36-48}{6} = \frac{48}{8} - \frac{12}{6} = 6 - 2 = 4$.

Auf diese Art wäre also die Aufgabe möglich.

§. 281. Angeführte Exempel werden hinreichend seyn, daß vielfältige Verfahren in etwas zu zeigen, die zu denen Gleichungen erforderliche Größen zu erhalten.

Wir übergehen hier das Verfahren, wenn in einer Aufgabe vom ersten Grade mehrere unbekannte Größen vorkommen, und beziehen uns dieserhalb auf das schon oft erwähnte größere Werk.

Das neunzehnte Kapitel.

Von den Gleichungen vom zweyten Grade, sowohl den reinen als den unreinen Gleichungen.

§. 282. Alle Gleichungen, in welchen die unbekannte Größe entweder allein in der zweyten, oder

oder auch zugleich in der ersten und zweyten Potenz sich befindet, sie mag übrigens mit oder ohne Coefficienten verbunden und geordnet seyn, wie sie wolle, sind Gleichungen vom zweyten Grade oder quadratische Gleichungen.

§. 283 Es giebt reine und unreine quadratische Gleichungen. Erstere sind solche, in welchen die unbekannte Größe allein in der zweyten Potenz vorhanden.

Letztere hingegen sind solche, in welchen die unbekannte Größe in der zweyten und ersten Potenz zugleich vorhanden. So ist z. E. eine reine quadratische Gleichung

$$x^2 - 12 = 4 \text{ oder } x^2 - a = b$$

eine unreine quadratische Gleichung hingegen

$$x^2 + x - 12 = 8 \text{ oder } x^2 + 2 - a = b.$$

§. 284. Die Bedingung der Aufgabe, nach welcher die Gleichung aufzusetzen, entscheidet, ob selbige vom ersten oder zweyten Grade sey.

§. 285. Sowohl bey dem Aufsatz als auch bey Bringung der unbekannten Größe auf eine Seite verfähret man auch hier wie bey Gleichungen vom ersten Grade.

§. 286. Der allgemeine Ausdruck für alle mögliche reine quadratische Gleichungen ist

$$x^2 = \pm f.$$

In dieser Formel werden durch f alle mögliche bekannte Größen, es mögen ganze Zahlen, ächte oder unächte Brüche seyn, vorgestellet. Vor selbiges ist sowohl plus als minus gesetzet, weil die bekannte Größe eines von beyden Zeichen haben muß.

§. 287.

§. 287. Die Auflösung einer reinen quadratischen Gleichung bestehet allein in Ausziehung der Wurzel von beyden Größen. Hiebey bemerken wir aber folgendes.

1) Wenn man nach dem Calculiren in einer reinen quadratischen Gleichung auf der, der unbekannten Größe entgegengesetzten Seite eine positive Größe, also f erhält, so ist solches ein Beweiß, daß die gegebene Aufgabe möglich; ist alsdenn f = dem Product einer mit sich selbst multiplicirten Größe, so lässet sich die Wurzel aus selbiger genau bestimmen, ist selbiges nicht, so muß man sich mit der durch Näherung gefundenen Wurzel begnügen.

2) Befindet sich aber nach erst erwähntem Calculiren f mit dem Minuszeichen, also $-f$; so zeiget solches die Unmöglichkeit der Aufgabe, weil auf keine Weise aus $-f$ die Quadratwurzel zu ziehen, sondern $\sqrt{-f}$ nach §. 246 eine unmögliche Größe ist.

3) Vor das Wurzelzeichen setzt man bey allen möglichen quadratischen reinen Gleichungen zugleich plus und minus, weil dieser Wurzel beydes seyn kann, und dennoch durch die Multiplication mit sich selbst eine positive Größe giebt. So ist z. E.

$$\sqrt{f}.\sqrt{f} = f \text{ und } -\sqrt{f}.-\sqrt{f} = f$$

Es bleibet also die Formel für alle mögliche reine quadratische Gleichungen

$$x^2 = f$$

$$\sqrt{x^2} = \pm\sqrt{f}$$

$$x = \pm\sqrt{f}$$

und unmögliche reine quadratische Gleichungen könnten allgemein vorgestellet werden

$$\frac{x^2 = -f}{\sqrt{x^2} = \sqrt{-f}.}$$

§. 288. Die Auflösung reiner quadratischer Gleichungen kann auch durch Hülfe der Logarithmen verrichtet werden. Wenn also

$$x^2 = f$$

so würde nach §. 278. $2 \log. x = \log. f$

$$\text{also } \log. x = \frac{\log. f}{2}$$

oder wenn $x^2 = 16$

so würde nach §. 278. $2 \log x = \log. 16$

$$\text{also } \log. x = \frac{1,2041200}{2} = 0,6020600$$

Dieser Logarithme aufgesucht giebt 4, welches auch die Wurzel von 16 ist.

§. 289. Folgende Aufgaben nebst beygesetzter Auflösung werden das, was bey möglichen reinen quadratischen Gleichungen zu beobachten, deutlicher lehren.

Erste Aufgabe.

Welches ist die Zahl, deren dritter Theil mit dem vierten Theil multipliciret und zu diesem Product 3 addiret, 6 ist?

Auflösung.

Die Zahl ist unbekannt, also $= x$; der dritte Theil derselben $= \frac{x}{3}$; der vierte Theil derselben $= \frac{x}{4}$;

das

das Product derselben $= \frac{x}{3} \cdot \frac{x}{4} = \frac{x^2}{12}$; hiezu soll 3 addiret werden, und alsdenn soll diese Summa $\frac{x^2}{12} + 3 = 6$ seyn. Es ist also die Gleichung

$$\frac{x^2}{12} + 3 = 6$$
$$-3 \quad -3$$
$$\frac{x^2}{12} = 3$$
$$:12$$
$$x^2 = 36$$
$$\sqrt{x^2} = \pm\sqrt{36}$$
$$x = \pm 6.$$

Da also $x = 6$

so ist $\frac{x^2}{12} + 3 = \frac{6^2}{12} + 3 = \frac{36}{12} + 3 = 3 + 3 = 6.$

Zweyte Aufgabe.

Eine Gesellschaft von Kaufleuten legen ein Capital zusammen, wozu ein jeder zehnmal so viel Thaler, als Personen in dieser Gesellschaft sind, beyträgt. Der Gewinn ist von jedem Hundert noch zweymal so groß, als Personen in der Gesellschaft sind. Der hundertste Theil dieses Gewinns mit $2\frac{2}{5}$ multiplicirt giebt die Anzahl der Personen. Wie viel sind also ihrer gewesen, was haben sie gewonnen, was hat ein jeder eingelegt?

Auflösung.

Sowohl der Gewinn als die Anzahl der Personen ist unbekannt; da aber der Gewinn von letztern abhänget, so sey $x =$ der Anzahl der Personen, wovon ein jeder zehnmal so viel Thaler, als Personen waren, mithin x Thaler eingelegt. Die Summa der ganzen Einlage erhalten wir durch die Regula Detri; also

1 Person : $10x$ Thaler $=$ x Person : $10x^1$ Thaler.

Es haben also alle Personen $10x^2$ Thaler eingelegt.

Den ganzen Gewinn bestimmt gleichfalls die Regula Detri. Da nemlich 100 Thaler von diesem Capital zweymal so viel gewinnet, als Personen in der Gesellschaft sind, so kann man schließen

100 Thlr. : $2x$ Thlr. Gewinn $=$ $10x^2$: y Gewinn

Es ist also y Gewinn oder der ganze Gewinn

$$\frac{2x \cdot 10x^2}{100} = \frac{2 \cdot 10x^{2+1}}{100} = \frac{20x^3}{100} = \frac{x^3}{5}$$

Hievon soll der hundertste Theil mit $2\frac{2}{9}$ multipliciret gleich der Anzahl der Personen $= x$ seyn.

Da nun $\frac{x^3}{5} : 100 = \frac{x^3}{5} \cdot \frac{1}{100} = \frac{x^3}{500}$ und $2\frac{2}{9} = \frac{20}{9}$

also $\frac{x^3}{500} \cdot \frac{20}{9} = \frac{20x^3}{4500}$, so wird die Gleichung seyn

$$\frac{20x^3}{4500} = x$$

$$20x^3 = 4500x \quad \text{.4500}$$

$$x^2 = 225 \quad :20x$$

$$\sqrt{x^2} = \pm\sqrt{225}$$

$$x = \pm 15.$$

Es

Es sind also in der Gesellschaft 15 Personen gewesen. Die Einlage eines jeden beträgt 10x, also $10.15 = 150$ Thaler. Die Summa aller Einlagen $= 10x^2 = 10.15^2 = 10.225 = 2250$ Thaler. Der Gewinn von jedem Hundert ist $2x = 2.15 = 30$ Thaler. Und die Summa des ganzen Gewinns $= \frac{x^3}{15} = \frac{15^3}{5} = \frac{3375}{5} = 675$ Thlr.

§. 290. **Unreine quadratische Gleichungen** sind solche, in welchen nach §. 283 die unbekannte Größe in der **ersten** und **zweyten Potenz** zugleich sich befindet.

§. 291. Die allgemeine Formel, durch welche alle unreine quadratische Gleichungen vorgestellet werden, ist

$$x^2 \pm px = \pm q.$$

In selbiger ist $x^2 =$ der Summa aller unbekannten Größen in der zweyten Potenz, $\pm px$ = der Summa aller unbekannten Größen in der ersten Potenz, wovon $p =$ ihren Coefficienten, $\pm q =$ der Summa aller möglichen bekannten Größen. Beyde letztere Glieder sind mit + und − zugleich bezeichnet, weil nach §. 286 diese Glieder entweder eine **Plus**- oder **Minusgröße** seyn müssen.

§. 292. Jetzt angeführte allgemeine Formel giebet zu folgenden Betrachtungen Gelegenheit.

1) In allen unreinen quadratischen Gleichungen können beyde Arten unbekannter Größen mehr als einmal enthalten seyn.

2) Eine jede unreine quadratische Gleichung kann, wenn sie in Ordnung gebracht, niemals aus mehr als drey Gliedern bestehen.

3) In dem Quadrat der unbekannten Größe aller unreinen quadratischen Gleichungen sind zwey unterschiedene Größen, nemlich p und x, befindlich, es muß also ihre Wurzel aus einem Binomio oder zwey Gliedern bestehen.

4) Die Summa der unbekannten Größen in allen unreinen quadratischen Gleichungen ist kein vollkommenes Quadrat, weil nur zwey Glieder als $x^2 \pm px$ in selbiger vorhanden, und ein vollkommenes Quadrat eines Binomii, nach denen in §. 225 angegebenen allgemeinen Formeln $a^2 + 2ab + b^2$ und $a^2 - 2ab + b^2$ drey Glieder erfordert.

5) Die Auflösung aller unreinen quadratischen Gleichungen erfordert aber ein vollkommnes Quadrat derer in selbigen vorhandenen unbekannten Größen. Es ist also nothwendig, hier dieses unvollkommne zu einen vollkommnen Quadrat zu machen. Das dazu dritte fehlende Glied erhalten wir auf folgende Art.

In denen erst angeführten beyden allgemeinen Formeln $a^2 + 2ab + b^2$ und $a^2 - 2ab + b^2$ ist das dritte Glied b^2 durch die Quadrirung des durch 2 dividirten zweyten Theils der Wurzel also $\left(\frac{2b}{2}\right)^2 = \frac{4b^2}{4} = b^2$ entstanden.

Dividiren wir also hier das im zweyten Gliede vorhandene p, welches = dem Coefficienten von

$x =$ dem zweyten Theil des Binomii mit a, und erheben diesen Quotienten $\frac{p}{2}$ zur zweyten Potenz, also $\left(\frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4}$, so giebt dieses Product das dritte fehlende Glied; addiren wir nun selbiges zu $x^2 \pm px$, so wird die Summa $x^2 \pm px + \frac{p^2}{4}$ gleich dem verlangten vollkommnen Quadrat, dessen Wurzel $= \sqrt{(x^2 \pm px + \frac{p^2}{4})} = x + \frac{p}{2}$ oder auch $x - \frac{p}{2}$ ist.

6) In allen Gleichungen wird aber die Gleichheit beyder Summen, sowohl der unbekannten als bekannten Größe erfordert. Es muß also auch hier dieses neu erhaltene Glied $\frac{p^2}{4}$ zu q als der Summa der bekannten Größe addiret werden. Es wird alsdenn

$$x^2 \pm px + \frac{p^2}{4} = q + \frac{p^2}{4}$$

und dieses wird nunmehro der allgemeine Ausdruck für alle mögliche unreine quadratische Gleichungen seyn.

§. 293. Die Auflösung aller unreinen quadratischen Gleichungen geschiehet ebenfalls durch Ausziehung der Wurzel aus beyden Größen; wenn dieses geschehen, so wird der zweyte Theil des von

denen unbekannten Größen erhaltenen Binomii, von der erhaltenen Wurzel des Quadrats der bekannten Größe mit entgegengesetzten Zeichen addiret, so giebt die Summa den gesuchten Wehrt.

Da also $x^2 \pm px + \frac{p^2}{4} = \pm q + \frac{p^2}{4}$

und $\sqrt{(x^2 \pm px + \frac{p^2}{4})} = \pm\sqrt{(\pm q + \frac{p^2}{4})}$

also $x \pm \frac{p}{2} = \pm\sqrt{(\pm q + \frac{p^2}{4})}$

so ist $x = \pm\frac{p}{2} \pm \sqrt{(\pm q + \frac{p^2}{4})}$

Wir bemerken hiebey

1) Daß auch hier x sowohl eine positive als negative Größe seyn kann, und aus dieser Ursache beyde Zeichen vor das Wurzelzeichen gesetzet werden müssen.

2) Wenn q oder die Summa der bekannten Größe eine Minusgröße, und größer als das da. zu addirte zweyte Glied $\frac{p^2}{4}$ ist, alsdenn $\sqrt{(-q + \frac{p^2}{4})}$ = einer unmöglichen Größe wird, mithin unter denen gegebenen Bedingungen die Aufgabe nach §. 287 unmöglich ist.

3) Die Ausziehung der Wurzel der Summa der bekannten Größe erfordert, daß selbige = dem Product einer mit sich selbst multiplicirten Größe. Wenn solches nicht ist, so erhält man die Wurzel

nicht

nicht völlig, sondern man muß sich mit der durch Näherung gefundenen begnügen.

§. 294. Aus allen diesen bisher angeführten Betrachtungen entstehen für die Auflösung aller unreiner quadratischen Gleichungen folgende Regeln.

1) Die Gleichung der gegebenen Aufgabe wird in gehörige Ordnung gebracht.

2) Der Coefficient von x oder der Summa der unbekannten Größe in der ersten Potenz wird durch 2 dividiret, dieser Quotient quadrirt, und dieses erhaltene Quadrat zu beyden Seiten der Gleichung addiret.

3) Sowohl aus der Summa der unbekannten als bekannten Größe wird die Wurzel gezogen.

4) Den zweyten Theil der Wurzel der unbekannten Größe addiret man mit entgegengesetzten Zeichen zu der erhaltenen Wurzel der bekannten Größe.

5) Da nun diese Summa sowohl eine Plus- als Minusgröße seyn kann, so ist alsdenn x durch einen gedoppelten Wehrt in lauter bekannten Größen bestimmt.

§. 295. Die Anwendung gegebener Regeln wollen wir durch folgender Aufgaben Auflösung zeigen.

Erste Aufgabe.

Wenn das Product zwoer Zahlen, wovon die eine um 11 größer als die andere, gleich 152, welches sind die beyden Zahlen?

Auflösung.

Beyde Zahlen sind unbekannt, wir wissen

aber, daß die Differenz beyder Zahlen = 11. Wenn also die kleine Zahl = x, so muß die grö-ßere = x + 11 seyn.

Das Product dieser beyden Zahlen soll gleich seyn 152. Also ist $x.(x+11) = 152$.

Da nun $x.(x+11) = x^2 + 11x$, so bestünde die Gleichung aus $x^2 + 11x = 152$.

Es ist aber auch hier die Summa der unbekannten Größe ein unvollkommnes Quadrat, weil in selbiger nur zwey Glieder befindlich. Der Coefficient von x also 11 wird deswegen nach der zwoten Regel halbirt, und dieser Quotient quadrirt, und zu beyden Seiten der Gleichung addiret. Es wird also

$$x^2 \pm 11x + (\tfrac{11}{2})^2 = \pm 152 + (\tfrac{11}{2})^2$$

Da aber $(\tfrac{11}{2})^2 = \tfrac{11}{2}.\tfrac{11}{2} = 12\tfrac{1}{4}$

so bestehet nunmehro die Gleichung aus

$$x^2 \pm 11x + 12\tfrac{1}{4} = \pm 152 + 12\tfrac{1}{4}$$

Aus beyden Größen der Gleichung wird nach der dritten Regel die Wurzel gezogen. Da nun

$$x^2 \pm 11x + 12\tfrac{1}{4} = \pm 152 + 12\tfrac{1}{4}$$

$$\pm\sqrt{(x^2 + 11x + 12\tfrac{1}{4})} = \pm\sqrt{(152 + 12\tfrac{1}{4})}$$

so ist $x + \tfrac{11}{2} = \pm\sqrt{729\tfrac{1}{4}}$

oder $x + \tfrac{11}{2} = \tfrac{27}{2}$.

Nach der vierten Regel wird der zweyte Theil der Wurzel der unbekannten Größe also $\tfrac{11}{2}$ zu $\tfrac{27}{2}$ mit entgegengesetzten Zeichen addiret; da also

$x + \tfrac{11}{2}$

$$x + \tfrac{11}{2} = \tfrac{27}{2}$$

$$\text{und} \quad -\tfrac{11}{2} = -\tfrac{11}{2}$$

$$\text{so ist} \quad x = \frac{27-11}{2} = \tfrac{16}{2} = 8.$$

Es ist also x, welches = der kleinen Zahl, hier = 8. Da nun die größere Zahl um 11 größer seyn soll, so ist $x+11 = 8+11 = 19$, und das Product beyder Größen $x^2+11x = 8^2+11.8 = 64+88 = 152$.

Nehmen wir hingegen $\frac{27}{2}$ als eine Minusgröße an, also $-\frac{27}{2}$, so würde

$$x = -\tfrac{27}{2} - \tfrac{11}{2} = \frac{-27-11}{2} = \frac{-38}{2} = -19$$

Es ist alsdenn, wenn x oder die kleine Zahl $= -19$, die größere $x+11 = -19+11 = -8$. Da nun $-19.-8 = 19.8 = 152$, und beyder Producte dem gegebenen gleich, so ist der Aufgabe ein Genüge geleistet.

Zweyte Aufgabe.

Es kauft jemand für 2760 Thaler Korn. Hätte Käufer für dieses Geld 12 Wispel Korn mehr erhalten, als er wirklich bekommen, so wäre der Einkaufspreiß von jedem Wispel $7\frac{2}{3}$ Thaler geringer gewesen. Wie viel Wispel Korn hat er also gekauft?

Auflösung.

Da die angekaufte Wispelzahl unbekannt, so ist solche = x, welche insgesamt 2760 Thaler im Einkauf betragen. Da nun

x Wispel : 1 Wispel = 2760 Thaler : $\frac{2760}{x}$ Thaler.

so kostet ein Wispel $\frac{2760}{x}$ Thaler.

Hätte

Hätte aber Käufer für obiges Geld 12 Wispel Korn mehr erhalten, so wäre der Einkaufspreiß von jedem Wispel $= \frac{2760}{x+12}$ Thaler, und alsdenn soll jeder Wispel $7\frac{2}{3}$ Thaler weniger im Einkaufspreiß betragen.

Wird also $7\frac{2}{3}$ Thaler von $\frac{2760}{x}$ Thaler abgezogen, so muß diese Differenz $= \frac{2760}{x+12}$ seyn.

Es besteht also die Gleichung aus

$$\frac{2760}{x+12} = \frac{2760}{x} - 7\frac{2}{3}$$

oder

$$\frac{2760}{x+12} = \frac{2760}{x} - \frac{23}{3}$$

oder

$$\frac{2760}{x+12} = \frac{8280-23x}{3x}$$

$$\frac{8280x}{x+12} = 8280-23x$$

$$8280x = -23x^2+8004x+99360.$$
$$-8004x = \quad -8004x$$

$$276x = -23x^2 + 99360$$
$$+23x^2 = +23x^2$$

$$23x^2+276x = 99360 \quad :23$$

$$x^2+12x = 4320$$

Das Quadrat supplirt durch $+36 = +36$

$$x^2 + 12x + 36 = 4356$$
$$\sqrt{(x^2 + 12x + 36)} = \sqrt{4356}$$
$$x + 6 = 66$$
$$-6 = -6$$
$$x = 60.$$

Da nun x = der Zahl gekaufter Wispel Korn, so sind 60 Wispel für 2760 Thaler angekauft, und kostet also ein Wispel $\frac{2760}{60}$ Thaler = 46 Thaler.

Hätte aber Käufer für obiges Geld 12 Wispel mehr, also 60 + 12 = 72 Wispel erhalten, so kostete ein Wispel $\frac{2760}{60+12} = \frac{2760}{72} = 38\frac{1}{3}$ Thaler.

Ziehen wir diese $38\frac{1}{3}$ Thaler von 46 Thaler ab, so ist die Differenz $46 - 38\frac{1}{3} = 7\frac{2}{3}$ Thaler, um so viel auch der Einkaufspreiß nach der Aufgabe geringer seyn soll.

Wir bemerken bey jetzt gezeigter Auflösung noch an, daß, wenn in einer unreinen quadratischen Gleichung, die in der höchsten Potenz sich befindliche unbekannte Größe mit einem Coefficienten, wie hier $23x^2$ verbunden, alsdenn alle drey vorhandene Glieder durch diesen Coefficienten dividiret werden müssen, damit man die in der höchsten Potenz vorhandene unbekannte Größe ohne Coefficienten erhalte.

Dritte Aufgabe.

Einige Personen gewinnen in der Lotterie 5004 Thaler, wovon ein jeder gleich viel bekommt.

Wären aber 6 Personen weniger gewesen, als ihrer wirklich sind, so hätte ein jeder 417 Thaler mehr zum Gewinn erhalten. Wie viel sind also Personen gewesen, welche an dem Gewinn Antheil gehabt, und was hat ein jeder bekommen?

Auflösung.

Die Anzahl der Personen sey = x.

Da nun der ganze Gewinn = 5004 Thaler, so beträgt eines jeden Theil $\frac{5004}{x}$ Thaler.

Wären aber 6 Personen weniger, also x — 6 Personen gewesen, so betrüge eines jeden Theil $\frac{5004}{x-6}$ Thaler, welche nach der Aufgabe $= \frac{5004}{x} + 417$ Thaler seyn sollen, weil alsdenn ein jeder 417 Thaler zum Gewinn mehr erhalten. Die Gleichung ist also

$$\frac{5004}{x} + 417 = \frac{5004}{x-6}$$

oder

$$\frac{5004 + 417x}{x} = \frac{5004}{x-6}$$

$$\cdot x$$

$$5004 + 417x = \frac{5004x}{x-6}$$

$$\cdot x-6$$

$$417x^2$$

$$417x^2 + 2502x - 30024 = 5004x$$
$$-2502x = -2502x$$
$$417x^2 - 30024 = 2502x$$
$$: 417$$
$$x^2 - 72 = 6x$$
$$+72 = +72$$
$$x^2 = 6x + 72$$
$$-6x = -6x$$
$$x^2 - 6x = 72$$

Das Quadrat supplirt $+9 = +9$

$$x^2 - 6x + 9 = 81$$
$$\sqrt{(x^2 - 6x + 9)} = \sqrt{81}$$
$$x - 3 = 9$$
$$+3 = +3$$
$$x = 12.$$

Es sind also, da x = der Anzahl der Personen, 12 Personen gewesen, welche an dem Gewinn von 5004 Thaler Theil genommen, und ein jeder hat erhalten $\frac{5004}{12} = 417$ Thaler.

Wären aber 6 Personen weniger, also 12 — 6 = 6 Personen gewesen, so hätte eines jeden Antheil betragen $\frac{5004}{6} = 834$ Thaler.

Da nun $834 = 417 + 417$, so ist der Aufgabe ein Genüge geleistet.

§. 296. Es finden sich oft auch Aufgaben, in welchen mehr als eine unbekannte Größe vorkommt,

kommt, deren Auflösung durch quadratische Gleichung geschiehet. Es würde aber der Absicht dieser Schrift zuwider seyn, sowohl hievon, als denen cubischen Gleichungen weiter etwas anzuführen

Wir beschließen also hiemit die Arithmetik, welche denen ersten Anfängern dieser Wissenschaft zur Vorbereitung gewidmet, um mit mehrerm Nutzen das größere Werk, wovon dieses ein Auszug ist, zu lesen.

Die

Die Elementar-Geometrie.

Das erste Kapitel.

Einige allgemeine Betrachtungen über die Geometrie.

§. 1.

Die Geometrie ist diejenige Wissenschaft, welche sich mit der Lage, Ordnung und Verbindung der Theile gegebener Größen beschäftiget.

Der Umfang und Nutze dieser Wissenschaft erstrecket sich sehr weit, denn sie beschäftiget sich mit allem, wozu sich nur ein Maasstab angeben, oder, das sich mit einer bekannten Größe vergleichen lässet.

Die ersten und vornehmsten Grundsätze derselben, welche unserer Absicht hier gemäß, sind folgende.

§. 2. Es giebt allenthalben Körper. Diese haben eine Größe, oder nehmen einen Raum ein; dieser Raum behält immer Gestalt und Größe, und richtet sich stets nach der Größe des Körpers, den er einschließet. Alle Körper haben zwar Poros,

ein Geometer betrachtet aber alle Körper als Größen, deren Theile ohne Zwischenraum mit einander verbunden; er siehet also selbige als eine **sterige Größe** oder als ein **Continuum** an.

§. 3. Ein jeder Körper hat **Grenzen**, welche ihn von allen Seiten umgeben, oder er höret wo auf.

Diese Grenzen heißen die **Oberfläche** der Körper.

Eine jede Oberfläche hat zu ihrer Grenze **geometrische Linien**, welche sie von allen Seiten einschließen.

Die Grenze dieser Linien ist ein **geometrischer Punct.**

§. 4. Die Oberfläche eines Körpers hat keine **Dicke**, sondern nur allein eine **Ausdehnung** in die **Länge** und **Breite.**

Die geometrische Linie hat weder **Dicke** noch **Breite**, sondern bestehet nur in der **Ausdehnung** nach der **Länge.**

Ein geometrischer Punct hat weder **Dicke**, **Länge** noch **Breite.**

§. 5. Man kann sich wohl vorstellen, daß durch die Bewegung eines Puncts von einem Ort zum andern nach einerley Richtung eine **gerade Linie** entstehe. Z. E. ab Fig. 1 ist eine gerade Linie, weil alle Theile derselben von a nach b gerichtet sind. Fig. 1.

Wir bemerken bey der geraden Linie:

1) Man kann zwischen jede zween gegebene Puncte, sie mögen gegen einander stehen wie sie wollen, wenn nur nichts im Wege, eine gerade Linie ziehen.

2)

2) Zwischen zween gegebenen Puncten ist die gerade Linie der kürzeste Weg. Es ist also

3) zwischen zween gegebenen Puncten nur eine gerade Linie zu ziehen möglich.

4) Eine gerade Linie, welche in ihrer einmal gegebenen Richtung fortgehet, kommt niemals wieder in ihren Anfangsort, sondern entfernt sich von selbigem immer weiter.

5) Zween gegebene Puncte in einer geraden Linie zeigen den Weg, nach welchem sie gehet. Sie mögen nahe oder entfernt seyn, so bestimmen sie also die Richtung der geraden Linie.

Sind aber diese zween gegebene Puncte am Anfang und Ende der geraden Linie, so bestimmen sie nicht nur ihre Richtung, sondern auch zugleich ihre Länge.

Ist aber dieses nicht, so muß ihre Länge noch durch einen oder zwey an denen Enden gegebenen Puncten bestimmt werden, die aber alsdenn auch ihre Richtung anzeigen.

6) Zwo aus einem Punct nach verschiedener Richtung gezogene gerade Linien entfernen sich immer weiter von einander. Hingegen zwo aus zween verschiedenen Puncten nach einem Punct gezogene gerade Linien berühren sich endlich in dem dritten Punct, und durchschneiden sich daselbst im weitern Fortgehen.

Es können also zwo gerade Linien nur einen Punct mit einander gemein haben, und sich nur an einem Ort durchschneiden.

§. 6. Gerade Linien sind von einander allein in ihrer Länge unterschieden. Man kann also selbige mit einander vergleichen und untersuchen, wie vielmal eine in der andern enthalten. Diese Vergleichung geschiehet durch eine andere zu einer gewissen Länge angenommene gerade Linie.

Auf dem Papier wird solches durch Beyhülfe des geöfneten Cirkels; auf dem Felde durch eine Kette, Stange, oder Schnur, auf welcher die zu der Einheit angenommene Länge in Theile befindlich, verrichtet.

Das im gemeinen Leben zu der Vergleichung erwählte Maas wird eine Ruthe, welche 1̊ bezeichnet, genennet.

Die Eintheilung dieser Länge in kleinere Theile ist an allen Orten nicht gleich. An vielen Orten bestehet selbige aus 16 Theilen, welche Fuß genennet und 1′ bezeichnet werden. Ein jeder Fuß wird wieder in 12 Theile oder Zoll, welche 1″ bemerket; ein jeder Zoll wird wieder in 12 Theile oder Linien, welche 1‴ angezeiget werden, getheilet.

Der Geometer aber erwählet zu der Eintheilung das Decimalmaas.

Nach selbigem ist eine Ruthe oder 1̊ = 10 Fuß = 10′; ein Fuß = 10 Zoll = 10″; ein Zoll = 10 Linien = 10‴; eine Linie = 10 Skrupel = 10⁗ u. s. w.

Diese Eintheilung verursachet eine große Bequemlichkeit im Multipliciren und Dividiren.

Will man durch erstere Rechnungsart oder die Multiplication eine gegebene Anzahl Ruthen,

then, Füße u. s. w. zu der kleinsten Benennung bringen, so hat man nur nöthig, die gegebene Zahlen an einander zu setzen, und selbigen die kleinste Benennung zu geben. Z. E. so wären 281 Ruhten 6 Fuß 4 Zoll, in Decimalzolle verwandelt, = 28164 Zoll = 28164″.

Soll man hingegen durch die Division eine gegebene Anzahl Zoll zu Ruthen und Fuß angeben, so streichet man von der gegebenen Zahl von der rechten gegen die linke Hand für jede Art Einheit eine Zahl ab, und lässet die vorne zur linken überbliebene Zahl für die Ruthen. So wären z. E. 54617 Skrupel = 5° 4′ 6″ 1‴ 7⁗ = 5 Ruthen 4 Fuß 6 Zoll 1 Gran 7 Skrupel.

Die Verschiedenheit der Länge der Füße, nach welchen eine Ruthe eingetheilet, ist von einigen Orten durch die Vergleichung mit dem in 1000 Theile getheilten Pariser Königlichen Fuß berechnet, in nebengesetzter Tabelle beygefüget. Da also eben erwehnter Pariser Königlicher Fuß in 1000 Theile getheilet, so beträgt von selbigen in Decimaltheilen.

Der Amsterdammer Fuß		873,666.....
Der Braunschweiger	-	876.
Der Calenberger	-	900.
Der Dänische	-	974,583.....
Der Londner	-	937,5.
Der Rheinländische	-	966,111.....
Der Schwedische	-	917,888.....
Der Venedische	-	1070.

Durch Hülfe der Proportionsregel kann man hieraus sehr leicht das Decimalmaas mit dem Duodecimalmaas, bey welchem nemlich die Einheit in 12 Theile getheilet, vergleichen. Von allen hier bekannt gemachten Maaßen ist vorzüglich der Pariser, Londner und Rheinländische Fuß zu bemerken, weil selbige sehr oft in physikalischen und mathematischen Berechnungen vorkommen. Wir bemerken zugleich, daß die in den Schriften der Franzosen oft angeführte Maaße, welche Toise benennet, eine Länge von 6 Pariser Fuß sey.

§. 7. **Eine krumme Linie** entstehet durch die Bewegung eines Puncts, welcher alle Augenblick seine Richtung verändert. Es ist also kein einziger Theil, der noch so klein ist, in einer krummen Linie gerade.

Die Verschiedenheit der krummen Linien ist unendlich. Man theilet selbige in **regulaire** und **irregulaire**. Erstere entstehen, wenn der bewegende Punct alle Augenblick nach einerley Gesetz seine Richtung ändert, so wie z. E. in der Cirkellinie. Letztere hingegen sind solche, in welchen der sich bewegende Punct nicht nach einerley Gesetz gehet.

Wir werden hier aber von den regulairen krummen Linien nur den Cirkel bemerken, da die übrigen in die höhere Geometrie gehören.

§. 8. Die Oberflächen der Körper sind entweder **gerade** oder **krumme**.

Eine gerade Oberfläche wird **eine ebene Fläche** oder **eine Ebene** genennet.

Die Eigenschaft derselben ist, daß man auf sel-

selbiger nach allen darauf angenommenen Puncten gerade Linien ziehen kann, deren Puncte in der Oberfläche zu liegen kommen. Die Oberfläche eines glatt gehobelten Tisches, eines Spiegels, u. s. w. können uns ohngefehr, obgleich nicht im strengen mathematischen Verstande, einen Abriß von einer flachen Ebene geben.

Eine krumme Oberfläche ist das Gegentheil von erstern, und kein Theil ist auf selbiger eben. Z. E. die Oberflächen einer Kugel, eines Eyes, auch selbst eines zusammen gerollten Papiers genau betrachtet, sind krumm.

§. 9. Die Oberflächen der Körper können mit geraden oder krummen Linien eingeschlossen seyn. Dieses verändert aber an denen jetzt gezeigten Eigenschaften nichts.

Die Betrachtungen, welche wir hier über die Puncte und Linien anstellen werden, gründen sich auf die Vorstellung, daß beydes in einer Ebene liege, und eben diese Betrachtungen sind der Inbegrif der **ebenen Geometrie.**

§. 10. Zween gleich weit von einander entfernte, in einer Ebene vorhandene gerade Linien werden **gleichlaufende** oder **Parallellinien** genennet. Diese berühren sich nie. Es sind also Fig. 2 die Linien ab und cd Parallellinien. Fig. 2.

Zwo in einer Ebene liegende gerade Linien, die sich stets weiter von einander entfernen, werden **divergirende** oder **auseinanderziehende,** nähern sie sich aber stets einander, so werden sie **convergirende, zusammenziehende Linien**

genennet. Ersterer Entfernung wird immer grö-
ßer, letztere kommen aber endlich in einem Punct
Fig. 3. zusammen. So sind z. E. Fig. 3 die Linien ab und cd von a nach b, und von c nach d betrach-
tet, **divergirende**, hingegen von b nach a und von d nach c betrachtet, **convergirende** Linien.

§. 11. **Zwo in einer Ebene liegende und in einem Punct zusammenkommende Linien machen einen ebenen Winkel**, dessen beyde gerade Linien die **Schenkel**, und der Berührungspunct der **Scheitel** des Winkels genennet werden. Man benennet einen solchen Winkel entweder mit denen an den Linien befindlichen Buchstaben solchergestalt, daß der an dem Scheitel des Winkels stehende Buchstabe in die Mitte gesetzet wird, oder, wenn es keinen Misverstand verursachet, allein mit dem Buchstaben des Scheitels. Oft wird auch in den Winkel ein besonderer Buchstabe gesetzet. Es
Fig. 4. sind also Fig. 4 die Linien ab und ac die Schen-
kel, und der Punct a der Scheitel des Winkels bac oder des Winkels a, welcher auch mit v oder einem andern Buchstaben bezeichnet werden kann. Sind die Schenkel eines Winkels, wie hier Fig. 4, gerade Linien, so wird ein solcher Winkel ein **geradlinigter**, sind die Schenkel aber krumme Linien, ein **krummlinigter** Winkel genennet.

§. 12. Die Neigung zwoer Linien gegen einander, oder ein Winkel ist sehr mannigfaltig.

Stehet eine gerade Linie auf einer andern,
Fig. 5. wie Fig. 5 cd auf ab, solchergestalt, daß sich cd weder nach der Seite a noch b hin neiget, so wird

sel-

selbige eine senkrechte, lothrechte Linie, oder allgemein ein **Perpendikel** genennet. Der Winkel, welcher durch einen auf einer geraden Linie gefälleten Perpendikel entstehet, wird ein **rechter Winkel**, angulus rectus, welcher der Kürze halber oft nur durch den Buchstaben R angezeiget wird, genennet; es ist also in Fig. 5 die Linie cd ein **Perpendikel**, und beyde Winkel, sowohl adc als cbd, sind rechte Winkel.

Neiget sich aber die Linie cd Fig. 6 nach der Seite b mehr als nach der Seite a, so wird der Winkel cdb ein spitzer, hingegen cda ein stumpfer Winkel genennet. Ersterer ist kleiner, letzterer ist größer als ein rechter Winkel, wie solches aus der Figur 6 zu ersehen, in welcher der Perpendikel nd mit punctirten Linien gezogen. Fig. 6.

Da es unendlich viele spitze und stumpfe Winkel giebt, so werden beyde allgemein mit dem Namen schiefe Winkel belegt.

§. 13. Bey beyden jetzt angezeigten und erklärten Figuren 5 und 6 sind zween Winkel entstanden, welche einen Schenkel gemein haben. Man nennet dergleichen **Nebenwinkel**, anguli deinceps positi. Stehet alsdenn der gemeinschaftliche Schenkel cd **senkrecht**, wie Fig. 5, so sind beyde Nebenwinkel gleich zween rechten Winkeln, folglich sind beyde gleich groß. Da nun Fig 5 der gemeinschaftliche Schenkel cd = **Perpendikel**, so ist der Winkel adc = dem Winkel cdb = Recto, also beyde Winkel adc + cdb = 2 R. Fig. 5.

Stehet hingegen der gemeinschaftliche Schenkel cd schief, wie Fig. 6, so sind beyde Nebenwinkel

schiefe Winkel, wovon der eine spitz, der andere stumpf, beyde aber sind gleich zween rechten Winkeln. Es ist also Fig. 6 cdb = einem spitzen, cda = einem stumpfen und cdb + cda = 2 R.

Fig. 6.

Schneiden sich aber zwo gerade Linien, so entstehen vier Winkel, wovon zwern einander entgegengesetzte **Verticalwinkel** genennet werden. Dergleichen sind Fig. 7 die Winkel v und w, ferner x und y.

Fig. 7.

§. 14. So wenig durch eine als zwo gerade Linien kann ein Platz eingeschlossen werden. Denn erstere bleibt Linie, und letztere Winkel. Werden aber die Schenkel eines Winkels durch eine dritte Linie mit einander verbunden, so wird die dazwischen befindliche Fläche eingeschlossen, und bekommt den Namen Figur. Die Zahl, Lage und Beschaffenheit der Linien, durch deren Verbindung eine Figur entstanden, bestimmen die Benennung der Figuren. Es giebt also geradlinigte, krummlinigte, vermischtlinigte Figuren.

Eine jede von diesen Arten wird durch die Anzahl der Linien, welche selbige bilden, und den Namen Seiten haben, von andern unterschieden und benennet. So wird eine Figur von drey Seiten ein **Dreyeck**, oder **Triangel**, von vier Seiten ein **Viereck**, von fünf, sechs, sieben u. s. w. Seiten ein **Fünfeck**, **Sechseck**, **Siebeneck** ꝛc. letztere auch wohl mit dem allgemeinen Namen **Polygon** oder **Vieleck** benennet. Diese Benennung nach der Anzahl der Ecken rühret daher, weil eine jede geradlinigte Figur eben so viel Ecken als Seiten hat. §. 15.

§. 15. Ein Dreyeck oder Triangel ist also eine Figur, welche durch die Verbindung dreyer Linien entstanden. Man benennet selbige sowohl nach ihren Seiten als Winkeln.

§. 16. Nach den Seiten betrachtet, giebt es gleichseitige, gleichschenkligte und ungleichseitige Triangel.

Ein **gleichseitiger Triangel**, Triangulum aequilaterum, ist, wenn alle Seiten oder die drey Linien desselben **gleich lang** sind, wie z. E. in Fig. 8, da ab = ac = bc. Fig. 8.

Ein **gleichschenkligter Triangel**, Triangulum aequicrurum, Isosceles, ist, wenn nur zwo Seiten gleich lang, wie in Fig. 9, da ac = bc. Fig. 9.

Ein **ungleichseitiger Triangel**, Triangulum scalenum, ist, wenn alle drey Seiten von unterschiedener Länge, wie Fig. 10, in welcher sowohl ab als ac und bc von besonderer Länge. Fig. 10.

§. 17. In Absicht der Winkel sind die Triangel entweder rechtwinkligt, spitzwinkligt, oder stumpfwinkligt.

Ein **rechtwinkligter Triangel**, Triangulum rectangulum, ist, dessen einer Winkel **recht**, die beyden übrigen aber **spitz** sind. Z. E. in Fig. 11 ist der Winkel cab = R., von den beyden übrigen, sowohl bca als abc, ist ein jeder spitzwinkligt. Fig. 11.

In einem rechtwinkligten Dreyeck erhalten die drey Linien oder Seiten folgende Namen.

Hypothenusa ist die dem rechten Winkel entgegengesetzte Seite, also in Fig. 11 bc.

Ca-

Catheti werden die beyden übrigen Linien, als Fig. 11 ab und ac genennet.

Ein spitzwinkligter Triangel ist, wenn Fig. 8. 9. alle drey Winkel spitz sind, wie z. E. Fig. 8 und Fig. 9.

Ein stumpfwinkligter Triangel ist, dessen einer Winkel stumpf, die beyden übrigen aber Fig. 10. spitz sind, wie z. E. Fig. 10, in welcher cab = einem stumpfen, hingegen sowohl abc als bca = einem spitzen Winkel.

§. 18. Eine durch vier gerade Linien eingeschlossene Figur oder Ebene wird ein Viereck genennet.

Sind in selbiger alle vier Seiten gleich lang, und deren vier Winkel gleich groß, mithin rechte Winkel, so wird diese Figur ein Quadrat genennet. Fig. 12. Da also in Fig. 12 ab = bd = dc = ca, und w = z = y = x = R, so ist abdc = Quadrat.

Sind aber zwar die vier Winkel gleich groß, hingegen nur zwo einander entgegenstehende Seiten von einerley Länge, so entstehet ein Rechteck, Fig. 13. Rectangel, Oblongum, wie Fig. 13 abdc, denn hier ist zwar w = z = y = x = R, aber ab = cd und ac = db.

Sind ferner alle vier Winkel schiefe Winkel, und alle vier Seiten gleich lang, so entstehet ein Rhombus oder Raute, wie Fig. 14, in welcher zwar Fig. 14. ac = cd = db = ba, aber die Winkel w, z, y, x sind nach §. 12 schiefe Winkel, wovon w und y spitze, hingegen x und z stumpfe Winkel sind.

Sind

Sind in einem Viereck nur zwo einander entgegenstehende Seiten gleich lang, und die vier Winkel schief, so entstehet eine längligte Raute, Rhomboides. Z. E. Fig. 15, hier ist ac = bd, cd = ab. Die Winkel w und y sind spitz, die Winkel x und z sind stumpf, also alle vier Winkel nach §. 12 schief. Fig. 15.

Alle vierseitige Figuren, in welchen zwo einander entgegenstehende Seiten von gleicher Länge sind, werden allgemein **Parallelogrammen** genennet.

Sind in einem Viereck nur zwo einander genüberstehende Seiten parallel, aber nicht gleich lang, wie z. E. Fig. 16, da ac parallel db, aber von verschiedener Länge, so entstehet ein **Trapezium**. Fig. 16.

Ist hingegen keine Seite der andern parallel, wie Fig. 17, so entstehet ein **Trapezoides**. Fig. 17.

Beyde Figuren werden allgemein **ungleichseitige Vierecke** genennet.

§. 19. Eine jede geradlinigte Figur, welche von mehr als vier Seiten eingeschlossen, wird ein **Polygon, Vieleck** genennet.

Selbige sind **regulair**, wenn alle Seiten und Winkel derselben gleich groß. **Irregulair**, wenn dieses nicht ist.

Ihre Benennung entstehet übrigens nach denen Seiten oder Ecken, welche sie bilden. So ist z. E. Fig. 18 ein **regulaires Sechseck**, weil ab = bc = cd = de = ef = fa und s = t = u = v = w = x, hingegen Fig. 19 ein **irregulaires Sechseck**. Fig. 18. Fig. 19.

§. 20.

§. 20. Von denen krummlinigten Figuren, welche in der Elementar-Geometrie ihren Platz finden, bemerken wir allein den **Cirkel.**

Cirkellinie, Kreis, Circulus, ist die krumme Linie adfbea Fig. 20, in welcher alle Puncte von dem in dieser Ebene befindlichen Punct c gleich weit entfernt sind. Wir bemerken hiebey folgende Benennungen.

Fig. 20.

Area circuli, **Kreisfläche,** wird die ganze Ebene adfbea genennet.

Fig. 20.

Centrum oder **Mittelpunct** ist der in selbiger befindliche Punct c, von welchem alle in der Kreislinie vorhandene Puncte gleich weit entfernt sind.

Peripherie wird die Kreislinie selbst, also adfbea genennet.

Arcus, **Bogen,** ist ein Theil der Peripherie, er sey groß oder klein, wie z. E. das Stück ad oder db.

Diameter, **Durchmesser,** ist eine jede durch das Centrum einer Cirkelfläche gezogene gerade Linie, welche an beyden Enden die Peripherie berühret, als ab oder de.

Semidiameter, Radius, **Halbmesser,** ist eine jede von dem Centro bis an die Peripherie gezogene gerade Linie, z. E. ac, dc, cb, ce.

Chorda, **Sehne,** ist die von einem bis zum andern Ende der Peripherie gezogene gerade Linie, die aber nicht das Centrum berühret. Z. E. db.

Segmentum, **Abschnitt,** ist die zwischen der

der Chorde und Peripherie befindliche Fläche. Z. E. dfb.

Sector circuli ist das zwischen zween Radiis und der Peripherie befindliche Stück der Kreisfläche als ceb, oder cdb u. s. w.

Tangente ist diejenige gerade Linie, welche zwar an einem Ort die Peripherie außer dem Cirkel berühret, aber nicht schneidet. Z. E. gh, welche in b den Cirkel berühret.

§. 21. Aus diesen jetzt bey dem Cirkel und dessen Linien gegebenen Erklärungen folget.

1) Alle von dem Mittelpunct bis an die Peripherie eines Cirkels gezogene gerade Linien sind gleich groß. Da nun selbige nach §. 20 Radii eines Cirkels, so sind auch **alle Radii in einem Cirkel gleich groß.**

2) Durch die Verlängerung eines Radii bis an das andre Ende der Peripherie entstehet ein Diameter. Es sind also **alle Diameter eines Cirkels = zween Radiis**, und aus diesem Grunde sind also auch **alle Diameter eines Cirkels gleich groß.**

§. 22. Alle Cirkel, welche ein gemeinschaftliches Centrum haben, werden concentrische Cirkel genennet, dergleichen sind die in Fig. 21 befindliche Cirkel, weil selbigen sämtlich das Centrum c eigen. Fig. 21.

Cirkel von verschiedenen Centris, deren Peripherie sich berühren oder schneiden, werden excentrische Cirkel genennet, dergleichen sind Fig. 22 a, b, c, d. Fig. 22.

§. 23.

§. 23. Eine jede Kreislinie ist schon vor alten Zeiten in 360 Theile getheilet, welche mit dem Namen **Grade** belegt. Ein jeder Grad ist wieder in 60 Theile oder **Minuten**; eine jede Minute wieder in 60 Theile oder **Secunden**, und eine Secunde wieder in 60 Theile oder **Tertien** getheilet.

Diese Eintheilung war willkührlich. Vermuthlich hat aber die bequeme Zerfällung der Zahl 360 und 60 in viele Factores zu Erwählung derselben Gelegenheit gegeben. Der Kürze wegen werden eben gemeldete Theile auf folgende Art bezeichnet, als ein Grad $= 1^{\circ}$, eine Minute $= 1'$, eine Secunde $= 1''$, eine Tertie $= 1'''$.

Es ist zwar diese Bezeichnung der §. 6 bey Längenmaaßen gezeigten gleich, es verursachet aber dennoch nicht leicht einen Mißverstand, weil aus dem Contexte leicht zu schließen, wovon die Rede.

§. 24. Diese jetzt angeführte Eintheilung ist allen Cirkeln, sie mögen groß oder klein seyn, gemein. Obgleich auch diese Theile der Peripherie bey einem großen Cirkel größer fallen wie bey einem kleinen, so verursacht dieses dennoch bey dem Gebrauch derselben nichts, denn es wird

1) hier bloß untersucht, der **wievielste Theil** der Peripherie ein Bogenstück sey.

2) lassen sich alle mögliche Cirkel als in einander gelegt, gedenken. Selbige haben alsdenn nach §. 22 einerley Centrum, folglich auch nur einen Diameter; sie sind also nur in der Länge des Radii unterschieden.

Wenn

Wenn man also eine gerade Linie auf den Diameter dieser in einander gelegten Cirkel bis an die Peripherie des größesten Cirkels ziehet, so wird der Winkel, welcher hiedurch entstehet, in allen Cirkeln gleiche Anzahl Grade einschließen. Z. E. in Fig. 21, da drey Cirkel in einander gelegt, ist der Boge ad = 60 Grad, und eben so groß ist auch der Boge $\alpha\delta$ und der Boge AD. Fig. 21.

§. 25. Alle Figuren, die nur allein in Absicht der Größe von einander unterschieden, sind einander **ähnlich**. Es sind also z. E. alle Cirkel, alle Quadrate u. s. w. **ähnliche** Figuren. Das Zeichen, wodurch die Aehnlichkeit gegebener Figuren angezeiget wird, ist ein liegendes S oder ∽.

§ 26. Alle Figuren, welche in allen Stücken auch in der Größe einander gleich sind, daß also alle Grenzlinien und der von selbigen eingeschlossene Raum auf den andern passet folglich einander decken, sind **gleich** und **ähnlich**, oder **kongruent**, welches durch ≅ angezeiget wird. Zween rechte Winkel, zwey gleich große Quadrate, zween Cirkel von gleich großen Radiis sind also **kongruent**. Es wird dahero auch

1) durch den Diameter ein Cirkel in zwey kongruente Theile,

2) durch einen auf den Diameter aus dem Centro gefälleten Perpendikel die halbe Cirkelfläche wieder in zween kongruente Theile getheilet. Denn z. E. in Fig. 23 ist die Linie ab = ac = ad, und eine jede nach § 20 = Radio. Ferner ist der Winkel cad = cab = Recto, weil ca nach §. 12 Fig. 23.

= Perpendikel, folglich decken sich diese Winkel. Es muß also auch

3) eine jede gerade Linie, welche unter einem rechten Winkel in dem Puncte, wo der Diameter durch das Centrum des Cirkels gehet, auf dem Diameter stehet, die halbe Cirkelfläche in zween gleiche Theile theilen, und dieser Raum ist gleich dem vierten Theil der ganzen Cirkelfläche. Da nun

4) der ganze Kreis eines Cirkels nach §. 23 = 360 Grad, so muß die Hälfte des Kreises oder bd = $\frac{360}{2}$° = 180 Grad, ferner ein Viertel des Kreises oder bc = $\frac{360}{4}$° = 90 Grad seyn.

§. 27. Eine gerade Linie, deren einer Endpunct außer dem Kreise, der andere aber in der Fläche eines Cirkels sich befindet, schneidet die Cirkellinie einmal. Hingegen eine gerade Linie, deren beyde Endpuncte außer der Cirkellinie befindlich, wird im Durchgehen den Cirkel zweymal schneiden. Denn gehet sie durch den Mittelpunct desselben, so wird selbige im Kreise zum Diameter, und berühret also nach §. 20 zweymal die Kreislinie. Gehet sie aber nicht durch das Centrum, so wird selbige nach eben erwehntem §. 20 zur Chorde, und auf beyde Fälle berühret sie den Kreis zweymal.

§. 28. Eine jede in einen Kreis solchergestalt gelegte Figur, daß die Scheitel aller ihrer Winkel den Kreis berühren, wird eine in einem Kreis beschriebene Figur; hingegen ein jeder in einer Figur gelegter Kreis, welcher alle

Sei-

Seiten der Figur berühret, wird eine um den Kreis beschriebene Figur genennet. Vom erstern zeiget Fig. 23, und vom letztern Fig. 24 ein Beyspiel.

Das zweyte Kapitel.

Von den Winkeln, und einigen ihrer Eigenschaften.

§. 29. Ein ebener Winkel war nach §. 11 die Neigung zwoer Linien gegen einander. Diese Winkel sind in Absicht ihrer Größe sehr unterschieden. Die Größe eines Winkels wird in der §. 23 angeführten Maaße also in Grade, Minuten, und wenn es erforderlich, auch in Secunden und Tertien bestimmt. Da nun dieses die Eintheilung eines Cirkels, so wird zu der Messung der Winkel der Cirkelbogen gebraucht. Die Erwählung dieses Mittels war die natürlichste, denn es lässet sich allemal zwischen beyden Linien, welche den Winkel bilden, ein Cirkelbogen beschreiben. Hiedurch werden z. E. in Fig. 21 die Linien cD und cA die Radii des Bogen AD, mithin sind selbige von gleicher Länge. Wird nun der eine Schenkel dieses Winkels AcD z. E. cA nach b hin verlängert, und auch auf selbiger der Bogen AD verlängert, so entstehet aus dem Bogen bAD ein halber Cirkel, weil die Linie bD durch den Mittelpunct c gehet, folglich = Diameter ist. Der Fig. 21.

Bogen AD ist also ein Theil des halben Cirkels bAD. Ist nun der halbe Cirkel bAD nach §. 23 = 180 Grad, so bestimmt der Bogen AD, um wie viel solcher Grade die beyden Schenkel Ac und Dc gegen einander geneigt sind.

Auf dem Papier werden die Winkel mechanisch durch Hülfe eines Werkzeuges, welches **Transporteur** heißet, gemessen. Dieser bestehet aus einem halben Cirkel, welcher gewöhnlich in ganze und halbe Grade eingetheilet. Man legt solchen mit dem Mittelpunct, welcher durch eine scharfe Kante in der Linie, die den Diameter vorstellet, bezeichnet ist, an den Scheitel des Winkels, und siehet, um wie viel Grade beyde Schenkel aus einander stehen.

§. 30. Zween Winkel, welche auf einer geraden Linie errichtet und einen Schenkel gemein haben, sind nach §. 13 **Nebenwinkel**, und beyde sind = zween **Rectis** oder = 180 Grad.

Fig. 23. Z. E. in Fig. 23 sind x und y Nebenwinkel. Denn sie stehen auf der geraden Linie bd, und der Schenkel ca ist beyden gemein, sie müssen also auch beyde = 180 Grad seyn, denn der Winkel x wird durch den Bogen bc, und der Winkel y durch den Bogen cd gemessen; ferner die Bogen bc + cd sind = dem Bogen bcd, welcher = dem halben Cirkel = 180 Grad = zween Rectis, denn die Linie bd ist = dem Diameter des Cirkels.

Geometrisch wird dieser Beweis folgendergestalt geführet.

Satz

Satz $x + y = 180^\circ$
denn x = Bogen bc
y = Bogen cd

also $x + y$ = Bogen bc + cd

aber Bogen bc + cd = $\frac{1}{2}$ Cirk. = 180 Grad

folglich iſt $x + y = 180$ Grad.

Aus dieſem Beweis folget auch:

1) Wenn zween Nebenwinkel vorhanden, und einer davon iſt bekannt, ſo kann man den andern durch die Subtraction leicht finden. Z. E. es ſey in Fig. 23 $x = 75^\circ$, da nun Fig. 23.

$75 + y = 180^\circ$

ſo iſt $y = 180 - 75 = 105^\circ$.

2) Wenn beyde Nebenwinkel gleich groß, ſo muß ein jeder derſelben $= 90^\circ = R$ ſeyn. Denn $x + y = 180^\circ$, es iſt aber $x = y$, folglich $x + y = x + x = 2x$, alſo

$2x = 180$

folglich $x = \frac{180}{2}^\circ = 90^\circ$.

3) Wenn der eine Nebenwinkel ſpitz, alſo kleiner als 90°, ſo muß der andere nothwendig ſtumpf, mithin größer als 90° ſeyn, weil beyde zuſammen 180 Grad ausmachen.

Man nennet einen ſolchen Winkel, welcher mit einem andern zuſammen genommen, zween rechte Winkel macht, das **Complement** oder die Ergänzung zu zween rechten Winkeln. Es iſt alſo Fig. 23 der Winkel x das Complement von dem Winkel y, und dieſer das Complement von jenem zu zween rechten Winkeln. Fig. 23.

Durch einen rückwärts verlängerten Schenkel eines jeden gegebenen Winkels kann also sein Complement zu zween rechten Winkeln leicht gezeichnet werden.

§. 31. Sind mehrere aus einem Punct gezogene Winkel auf einer geraden Linie vorhanden, ihre Neigung mag übrigens beschaffen seyn, wie sie wolle, so werden selbige zwar auf deutsch auch **Nebenwinkel**, auf lateinisch aber contigui genennet, um selbige von erstern, da nur zween aus einem Punct entstanden, zu unterscheiden. Der Beweis von diesem ist ersterm völlig gleich.

Fig. 25. Z. E. in Fig. 25 sind vier Winkel vorhanden, welche insgesamt = 180 Grad seyn müssen.

Der Satz wäre also hier

$$w + x + y + z = 180^{\circ} = 2\ R.$$

Denn $w + x + y + z =$ Bogens $ab + bc + cd + de$
da nun $ab + bc + cd + de = \frac{1}{2}$ Cirk. $= 2$ R.
so muß auch $w + x + y + z = 180^{\circ} = 2$ R.

§. 32. Alle Winkel, welche durch die aus einem Punct in einer Ebene nach allen Seiten hingezogene gerade Linien entstehen, sind $= 360^{\circ} = 4$ R.

Denn, wenn man eine Linie derselben z. E. Fig. 26. in Fig. 26, die ab bis c verlängert, so kommt ein Theil der Winkel oberhalb, der andere Theil unterhalb der Linie ac zu liegen; da aber nach §. 31 alle auf einer geraden Linie aus einem Punct entstandene Winkel $= 2$ R, so müssen diese hier ober- und unterwärts der Linie vorhandene Winkel doppelt so viel, also $2 . 2$ R $= 4$ R $= 360^{\circ}$ seyn.

§. 33.

§. 33. Zween einander entgegengeſetzte Winkel, welche nach §. 13 **Verticalwinkel** genennet, ſind gleich groß. Es iſt alſo z. E. in Fig. 7 $v = w$ und $x = y$. Fig. 7.

Denn $\left.\begin{matrix} v + x = 2R \\ w + x = 2R \end{matrix}\right\}$ weil ſie Nebenwinkel.

alſo iſt $v + x = w + x$
da nun $-x = -x$

ſo iſt $v = w$.

ferner iſt $\left.\begin{matrix} v + x = 2R \\ v + y = 2R \end{matrix}\right\}$ weil ſie Nebenwinkel.

alſo iſt $v + x = v + y$
da nun $-v = -v$

ſo iſt auch $x = y$.

§. 34. In der jetzt angeführten Fig. 7 ſind vier einander entgegengeſetzte Winkel, welche $= 4R = 360°$. Wenn nur einer von ſelbigen bekannt, ſo kann die Größe der übrigen leicht beſtimmet werden. Denn es ſey z. E. $v = 36$ Grad, ſo iſt w, weil er ihm entgegen geſetzet, eben ſo groß, alſo auch 36 Grad; beyde alſo, nemlich $v + w = 36 + 36 = 72°$. Da nun alle um einen Punct vorhandene Winkel $= 4R = 360°$, ſo müſſen die beyden übrigen hier $x + y = 360 - 72 = 288°$, und da $x + y$ ein jeder von dieſen $\frac{288}{2} = 144$ Grad ſeyn.

Das dritte Kapitel.

Von den Dreyecken, Parallellinien, und weitere Betrachtung der geradlinigten Figuren.

§. 35. Ein **Dreyeck** oder **Triangel** bestehet nach §. 15 aus drey an einander gelegten Linien, welche drey Winkel einschließen.

Die Gestalt aller Triangel wird durch die Länge und Lage ihrer Linien bestimmet. Ein jeder Triangel bestehet aus sechs Stücken, nemlich drey Seiten und drey Winkeln. Sind von diesen sechs Stücken drey Stück, worunter aber allemal eine Seite oder Linie seyn muß, bekannt, so lässet sich hiedurch der Triangel bestimmen. Wir bemerken hiebey folgende Lehrsätze.

§. 36. Der **erste Lehrsatz.** **Zwo Seiten und der eingeschlossene Winkel in einem Triangel** (dieses ist der zwischen zwo Seiten befindliche Winkel) **bestimmen nur einen Triangel**; oder, es lässet sich nur ein Dreyeck daraus bilden, Fig. 28 Z. E. in Fig. 28 sey die Länge der Linien ab und ac, ferner die Größe des durch diese Linien eingeschlossenen Winkels cab bekannt.

Es sind also nicht nur die Endpuncte beyder Linien in b und c, sondern auch die Neigung beyder Linien gegen einander gegeben. Da sich nun zwischen zween Puncten nach §. 5 nur eine gerade Linie ziehen lässet, so ist auch die Länge der Linie bc durch die Endpuncte b und c bestimmet; wird nun

nun diese gezogen, so entstehet ein Triangel, welchem allein die gegebene Maaßen eigen.

Sind also in zwoen oder mehrern Triangeln zwo Seiten, und der von diesen eingeschlossene Winkel gleich groß, so sind diese Dreyecke nach §. 26 **kongruent**, und decken sich einander, ihre Lage mag übrigens beschaffen seyn, wie sie wolle.

§. 37. Der zweyte Lehrsatz. **Wenn in einem Triangel eine Seite und die beyden daran liegenden Winkel**, welche aber beyde zusammen genommen, allemal weniger als 180° ausmachen müssen, **gegeben**, so lässet sich nur **ein einziger Triangel daraus machen.** Z. E. in Fig. 28 sey gegeben die Länge der Linie ab, ferner die Winkel cab und abc. Fig. 28.

Da diese Winkel die Neigung der beyden übrigen erforderlichen Linien ac und bc bestimmen, und diese nur alsdenn sich in einem Punct nach §. 5 berühren können, so ist also auch ihre Länge bestimmt.

Wäre aber die Neigung beyder Linien zusammen genommen gleich 180°, oder noch größer, so würden diese sich niemals berühren können, weil selbige nach §. 10 **divergirende** Linien werden.

Alle Dreyecke, in welchen also eine Seite und die an selbiger befindliche zween Winkel gleich groß, sind einander gleich und ähnlich oder **kongruent.**

§. 38. Der dritte Lehrsatz. **Drey gegebene Seiten**, wovon aber immer zwo zusammen genommen größer, als die dritte seyn müssen, **bestimmen ein Dreyeck.**

Fig. 27. Man erwähle z. E. von denen in Fig. 27 vorgestellten dreyen Linien ab, ac, bc zur Grundlinie, welche man wolle, so erhalten wir durch die Verbindung der übrigen beyden Linien Dreyecke, welche alle kongruent sind, ob selbige gleich in der Stellung unterschieden; es sind also die nach selbigen verfertigte Dreyecke Fig. 28, Fig. 29, Fig. 30 kongruent. Wären aber in selbigen zwo Linien zusammen genommen, nicht länger als die dritte, so könnte man erstere durch letztere nicht schließen. Abgeschnittene Stücke von Draht, wodurch man einen Triangel bildet, werden dieses deutlich zeigen.

Fig. 28. 29. 30.

Alle Triangel also, welche aus gleich langen Seiten bestehen, sind kongruent.

§. 39. Aus diesen Lehrsätzen folget:

1) Bey kongruenten Triangeln sind gleiche Seiten auch gleichen Winkeln entgegen gesetzet, oder die Seiten, welche gleichen Winkeln gegenüber liegen, sind einander gleich. Da also die Fig. 28, 29, 30 vorgestellten Triangel, wie bewiesen, kongruent sind, so müssen auch die Winkel x, y, z einander gleich seyn.

2) Da drey Linien einen Triangel bestimmen, so wird ein gleichseitiger bereits durch eine Seite, ein gleichschenkligter durch zwo Seiten bestimmt, denn im erstern Fall sind alle drey Seiten, im letztern zwo Seiten nach §. 16 von gleicher Länge.

§. 40. Einige der vornehmsten Aufgaben, deren Auflösung auf denen gegebenen Lehrsätzen beruhet, sind folgende.

Erste

Erste Aufgabe.

Nach einem gegebenen Winkel, z. E. Fig. 31 bac einen andern gleich großen zu verfertigen.

Auflösung.

Man beschreibt zuerst aus dem Punct a des gegebenen Winkels bac Fig. 31 mit willkührlicher Oefnung des Cirkels den Bogen de, hiedurch wird ad = ae = Radio. Fig. 31.

2) Ziehet man eine gerade Linie von unbestimmter Länge, z. E. Fig. 32 fi, setzet auf selbige die Länge fh, welche = ae. Fig. 32.

3) Der eine Fuß des Cirkels wird in h gesetzet, und mit der Weite de ein kleiner Cirkelstrich gemacht.

4) Mit der Weite ad wird aus dem Punct f ersterer Cirkelstrich in g durchschnitten.

5) Wird die gerade Linie fg gezogen, so ist alsdann der Winkel gfh = dem Winkel bac.

Den Beweis hievon deutlicher einzusehen, ziehe man Fig. 32 gh und de, jede mit punctirten Linien zusammen, so entstehen zween Triangel, welche kongruent seyn müssen. Fig. 31.

Denn ad = fg
ae = fh } ex constructione.
de = gh

folglich Triang. dae ≅ Triang. gfh.

Da nun de = gh, so ist auch nach §. 39 der Winkel bac = gfh.

Mechanisch könnte dieser Auflösung durch Hülfe des Transporteurs ein Genüge geschehen.

Man

Man hätte alsdenn nur nöthig, nach selbigem die Grade des gegebenen Winkels zu zählen, eine gerade Linie zu ziehen, an einem Ende derselben den Transporteur mit dem Punct, welcher nach §. 29 der Mittelpunct desselben ist, zu legen, und eben so viel Grade, als der gegebene hatte, abzuzählen, mit einem Punct zu bemerken, und selbigen mit dem Endpunct der gezogenen Linie durch eine gerade Linie zu vereinigen.

Zwote Aufgabe

Einen Triangel, zu welchem alle drey Seiten gegeben, zu verfertigen.

Auflösung.

Diese ist ersterer, in welcher aus drey bekannten Seiten der Winkel gebildet wurde, völlig gleich.

Dritte Aufgabe.

Einen gleichseitigen Triangel nach der gegebenen Länge einer Seite, z. E. Fig. 8 ab zu zeichnen.

Fig. 8.

Auflösung.

Mit einem in der gegebenen Weite ab geöffneten Cirkel ziehet man aus dem Punct a nach c einen unbegränzten Cirkelbogen, und durchschneidet selbigen mit gleicher Weite aus dem Punct b in c, ziehet die geraden Linien ac und bc, so sind alle drey Seiten von gleicher Länge, weil selbige sämtlich Radii eines Cirkels.

Vierte Aufgabe.

Einen gleichschenkligten Triangel nach zwo gegebenen Linien ac und ab Fig. 9 zu verfertigen.

Auf-

Auflösung.

Man ziehe eine gerade Linie, welche = ab Fig. 9. Aus beyden Endpuncten a und b ziehe man mit dem Cirkel in der Weite ac die Kreuzbogen v.w, x.y, welche sich in c schneiden. Durch die Verbindung der geraden Linien ca und cb entstehet alsdenn der verlangte Triangel.

Fünfte Aufgabe.

Nach der gegebenen Linie ab, und denen beyden anliegenden Winkeln cab und cba Fig. 10 einen Triangel zu verfertigen.

Auflösung.

An die gegebene Linie ab Fig. 10 werden aus beyden Endpuncten a und b nach § 40 die gegebene Winkel cab und cba gesetzet, beyder Schenkel werden, bis sie sich in c schneiden, verlängert, und alsdenn die geraden Linien ca und cb gezogen. Fig. 10.

Sechste Aufgabe.

Nach zwo gegebenen Linien ab und ac, und den von selbigen eingeschlossenen Winkel cab Fig. 28 einen Triangel zu verfertigen.

Auflösung.

Man ziehet eine gerade Linie, und setzet aus einem Endpunct derselben, z. E hier Fig. 28 aus dem Punct a nach § 40 den gegebenen Winkel cab. Beyde Schenkel desselben werden ab und ac gleich gemacht, und die Endpuncte derselben c und b durch die gerade Linie bc verbunden. Fig. 28.

Siebende Aufgabe.

Einen gegebenen Winkel, z. E. dac Fig. 33 in zween gleiche Theile zu theilen.

Auf-

Auflösung.

Fig. 33. Beyde Schenkel dieses Winkels werden durch den Bogen dc gleich gemacht. Aus d und c werden mit beliebiger Oefnung des Cirkels Kreuzbogen gezogen, welche sich in b schneiden. Dieser Punct wird mit a durch eine gerade Linie verbunden, so wird durch selbige der Winkel dac in zween gleiche Theile getheilet; denn wenn wir die beyden Linien db und bc ziehen, so entstehen zween Triangel dab und bac, welche kongruent sind, weil

$$\left.\begin{array}{l} ad = ac \\ bd = bc \end{array}\right\} \text{ex constructione.}$$
$$ab = ab$$

also Triang. dab $\cong$ Triang. bac §. 38.

Da nun db $=$ bc, so ist auch nach §. 39 der Winkel dab $=$ dem Winkel bac, folglich die Hälfte des Winkels dac.

Auf gleiche Art kann ein Theil dieses Winkels wieder in zween Theile getheilet werden. Es ist dahero die Eintheilung aller Winkel in solche Theile, welche nach denen Potenzen der zwey fortgehen, als 2, 4, 8 ꝛc. sehr leicht zu bewerkstelligen.

Achte Aufgabe.

Eine gerade Linie, z. E. ab Fig. 34 in zween gleiche Theile zu theilen.

Auflösung.

Fig. 34. Aus denen Endpuncten a und b werden mit beliebiger Oefnung des Cirkels, welche aber mehr als die Hälfte der Linie ab beträgt, ober- und unterwärts der gegebenen Linie Kreuzbogen, welche sich in c und d durchschneiden, gezogen. Diese

Durch.

Durchschnittspuncte werden mit einer geraden Linie cd verbunden, so wird cd die gegebene Linie ab in e in zween gleiche Theile theilen, und muß also ae = eb seyn.

Ziehen wir die punctirte Linien ac, cb, bd, da, so werden wir den Beweis sehr leicht finden.

Denn ac = bc
bd = da } ex constructione.
cd = cd

folglich Trian. cad ≅ Triang. cbd.
also auch ac = eb.

Wäre die gegebene Linie ab zu Eröfnung des Cirkels zu lang, so schneidet man von beyden Enden nach der Mitte zu, gleiche Theile ab, und verfähret alsdenn, wie gelehret.

Neunte Aufgabe.

Auf der Mitte einer gegebenen geraden Linie, z. E. ab Fig. 34 einen Perpendikel aufzurichten.

Auflösung.

Dieses geschiehet auf die eben gezeigte Art. Fig. 34.
Da Fig. 34 nach vorhergehender Construction die Triangel ace und bce gleichfals kongruent werden, weil ac = cb, ae = eb, und ce sich selber gleich, so ist auch x = y, und weil es Nebenwinkel, jeder = Recto, also ce = einem Perpendikel auf der Mitte ab.

Zehnte Aufgabe.

Auf einem außer der Mitte einer Linie an Fig. 34 gegebenen Punct c einen Perpendikel zu fällen.

Auf-

Auflösung.

Fig. 34. Es sey Fig. 34 der Punct e gegeben. Hier hat man nur nöthig, von dem gegebenen Punct e nach beyden Seiten a und b gleiche Entfernung in a und b zu nehmen, und hierauf mit dem Cirkel, welcher etwas weiter als ae geöfnet, aus a und b ober- und unterwärts Kreuzbogen zu machen, welche sich in c und d durchschneiden. Wird alsdenn die Linie cd gezogen, so stehet ee auf der gegebenen Linie an perpendikular. Der Beweis hievon ist ersterm gleich.

Eilfte Aufgabe.

Am Ende einer geraden Linie einen Perpendikel aufzurichten.

Auflösung.

Fig. 34. Die gegebene Linie sey eb Fig. 34. Man hat alsdenn nur nöthig, diese Linie eb nach a hin zu verlängern, und alsdann nach der Auflösung der neunten Aufgabe zu verfahren.

Wir übergehen hier die übrigen Arten, dieser Aufgabe ein Genüge zu leisten, wie auch überhaupt mechanisch auf alle Fälle auf einer geraden Linie einen Perpendikel zu errichten, und bemerken nur, daß sowohl aus einem Punct auf als über einer geraden Linie nur ein Perpendikel zu ziehen möglich, weil nur eine Art rechter Winkel vorhanden.

§. 41. In jedem gleichschenkligten Dreyeck sind die Winkel an der Grundlinie, auf welcher nemlich die beyden Schenkel stehen, gleich groß.

Fig. 35. Es ist also Fig. 35 der Winkel x = y.

Man

Man errichte nur auf der Grundlinie ab aus der Spitze c den Perpendikel cd nach der neunten Aufgabe, so wird die Linie ab hiedurch in zween gleiche Theile getheilet; folglich ad = db.

Da nun ad = db
ac = cb } ex constructione.
cd = cd

so ist Triang. cad ≅ Triang. cbd, folglich auch x=y.

Eine von der Mitte der Grundlinie in die Spitze eines gleichschenkligten Triangels gezogene gerade Linie ist also nicht nur ein Perpendikel, sondern theilet auch den Winkel in der Spitz in zween gleiche Theile, es muß also auch acd = bcd seyn.

§. 42. Ein gleichseitiger Triangel kann in allen Lagen als ein gleichschenkligter Triangel betrachtet werden, weil alle drey Seiten gleich lang, folglich die Erwählung unter denen drey Linien zur Grundlinie willkührlich; da nun in einem gleichschenkligten Triangel die an der Grundlinie vorhandene Winkel nach §. 41 von gleicher Größe, so müssen auch in einem gleichseitigen Triangel alle drey Winkel einander gleich seyn.

§. 43. Wenn in einem Triangel, z. E. abc Fig. 36 eine Seite z. E. bc verlängert wird, so ist der Winkel acd außerhalb des Dreyecks größer als jeder von den beyden inwendigen Winkeln des Dreyecks, abc oder bac, welche beyde dem auswendigen Winkel acd entgegen stehen. Fig. 36.

Wir müssen also beweisen:

1) Der Winkel acd > als der Winkel bac.

2) Der Winkel acd > als der Winkel abc.

Zu dem erstern Beweis wird erfordert, daß wir die Linie ac Fig. 36 in zween gleiche Theile, wie hier in e, theilen, ferner aus der Spitze b durch e die punctirte Linie bf ziehen, welche doppelt so lang als be, und endlich fc durch eine punctirte Linie verbinden.

Wir erhalten hiedurch zween Triangel aeb und cef, in welchen der Winkel x = y, weil solche nach §. 33. Verticalwinkel

ae = ec
be = ef } ex constructione

folglich Triang. aeb ≅ Triang. cef.

Es ist also nach §. 39 der Winkel n = m. Da aber der Winkel acd = dem Winkel m + r und m + r > als m, so ist auch der Winkel acd > als n. Da nun n = dem Winkel bac, so muß auch der Winkel acd > als bac seyn.

Zu dem zweyten Beweis verlängern wir die Linie ac Fig. 37, theilen bc in zween gleiche Theile, ziehen die Linie af, in welcher ay = yf, und verbinden die Puncte f und c mit einer geraden Linie.

Fig. 37.

Da also by = yc
ay = yf } ex constructione.
v = w, weil es Verticalwinkel.

so ist auch Triang. aby ≅ Triang. fcy.
folglich der Winkel r = s, also s + t > als r.

Es ist aber s + t = dem Winkel bcy, und r = dem Winkel abc.

Da

Da nun der Winkel bcy = acd, weil es Verticalwinkel, so ist auch der Winkel acd > als der Winkel abc.

§. 44. In jedem geradlinigten Dreyeck sind die größern Seiten denen größern Winkeln, und die kleinern Seiten den kleinern Winkeln entgegen gesetzet.

Es sey z. E. Fig. 38 ac > als ab. Macht Fig. man ac = ab, welches geschiehet, wenn man von 38. ac die Länge ab abschneidet, und hier in d eintrift, und ziehet die Linie bd, so entstehet ein gleichschenkligter Triangel bad, in welchem ab = ad, folglich muß auch x = y seyn. Es ist also x + n > x, folglich auch x + n > y.

Der Winkel y aber ist ein auswendiger Winkel an der verlängerten Seite dc des Triangels bdc, folglich nach §. 43 größer als der Winkel bcd, es ist also auch um so mehr abc oder x + n größer als acb. Da nun der Winkel acb der Linie ab, welche kleiner als ac, und der Winkel abc der größern Linie ac entgegen gesetzet ist, so ist unser Satz bewiesen.

§. 45. In einem jeden Dreyeck ist allezeit die Summe zweener Winkel kleiner als 180° oder zween rechte Winkel.

Denn in Fig. 36. war Triang. abe ≅ fce, Fig. 36. also n = m.

Da nun m < m + r

und m = n

so ist auch n < m + r

ferner ist $n + s < m + r + s$

Da nun $m + r + s = 2$ R.

so ist $n + s < 2$ R.

Hieraus folget also ganz natürlich, daß die Vereinigung zweer an die Endpuncte einer Linie gesetzten Linien unmöglich, wenn nemlich beyder Winkel entweder $= 2$ R. oder größer als 2 R.

Die Möglichkeit der Vereinigung findet alsdenn nur statt, wenn selbiger Winkel weniger als 2 R ausmachet.

§. 46. Parallelen können sich nie nach §. 10 vereinigen.

Fig. 39. Werden selbige z. E. Fig. 39 ab und cd durch die dritte ef durchschnitten, so werden die Winkel x, y, n, m die **innern**, und die Winkel s, r, t, u die **äußern** Winkel, ferner m und x, y und n die **Wechselwinkel** genennet.

Wir behaupten, daß in einer Parallele, welche durch eine gerade Linie, in welcher Lage es auch sey, durchschnitten werde,

1) Zween inwendige Winkel, also hier $x + n$ oder $y + m = 2$R.

2) Die Wechselwinkel einander gleich sind, also $y = n$ und $x = m$.

3) Sind die äußern denen ihnen entgegengesetzten innern Winkeln gleich, folglich hier $r = m$, $s = n$, $y = u$, $x = t$.

§. 47. Der erstere Satz ist also. Zween der innern Winkel, also $x + n$ oder $y + m$ sind gleich zween rechten Winkeln. Denn, wäre $x + n > 2$ R.

so müste ab und cd sich nach b und d hin vereinigen; wäre $x + n < 2$ R., so müste die Vereinigung dieser Linien ab und cd nach a und c hin geschehen. Dieses widerspricht aber nach §. 45 der Erklärung von Parallellinien.

§. 48. Der zweyte Satz. Die Wechselwinkel sind einander gleich, also $y = n$, und $m = x$.

Denn $x + y = 2$ R., weil es Nebenwinkel
$x + n = 2$ R., nach §. 47.

also $x + y = x + n$
da nun $-x = -x$
so ist $y = n$.

ferner weil $n + m = 2$ R., weil es Nebenwinkel
$n + x = 2$ R. nach §. 47

so ist $n + m = n + x$
da nun $-n = -n$
so ist $m = x$.

§. 49. Der dritte Satz. Die äußern sind denen ihnen entgegengesetzten innern Winkeln gleich; also ist

1) $r = m$
denn $y + m = 2$ R. nach §. 47
$y + r = 2$ R. nach §. 33

also $y + m = y + r$
da nun $-y = -y$
so ist $m = r$.

a) y = u

denn m + y = 2 R. nach §. 47
m + u = 2 R. nach §. 33

---

also m + y = m + u
da nun − m = − m

---

so ist y = u.

Die übrigen Beweise, daß s = v, x = t, können auch auf gleiche Weise sehr leicht geführet werden.

§. 50. Aus diesen dreyen bewiesenen Sätzen folget also auch, daß,

1) wenn selbiges von zween geraden Linien bewiesen, auch diese Parallelen sind.

2) Wenn nur einer von diesen Sätzen bewiesen, die Wahrheit der andern auch aus selbigen folget.

3) Daß dieser Beweis auch für mehrere Parallelen gelte, weil man eben diese Betrachtung allezeit von zwo zu zwo Linien anstellen kann.

Das Zeichen des Parallelismus zwoer oder mehrerer Linien oder Flächen ist ∥.

§. 51. Auf diese Beweise beruhet nicht nur die mannigfaltige Art Parallelen zu ziehen, sondern auch die Gewißheit, daß durch einen gegebenen Punct nur eine Parallele gezogen werden könne, weil selbige sonst ihre Lage und Winkel verändern müsse, welches beydes ohnmöglich.

§. 52. Durch eine Diagonale wird ein jedes Parallelogram in zween gleiche Theile getheilet.

Diagonale ist eine gerade Linie, welche von einem zum andern entgegengesetzten Winkelpunct

in einem Parallelogram (welches nach §. 18 ein Viereck, worin zwo entgegengesetzte Seiten gleich lang) gezogen wird.

Da also Fig. 40 cb = der Diagonale von abcd, so muß auch Triang. cab ≅ Triang. cdb seyn.

Denn $\left.\begin{array}{l} ab = cd \\ ac = bd \end{array}\right\}$ ex constructione
$cb = cb$

folglich Triang. cab ≅ Triang. cdb

folglich das Parallelogram abcd durch die Diagonale cb in zween gleiche Theile getheilet. Aus der Kongruenz der Triangel folget ferner, daß $m = n$, $x = y$, $t = s$, und also $dc \mathrel{/\!/} ab$, und $ac \mathrel{/\!/} db$ sey.

§. 53. Es sind also

1) In einem jeden Viereck zwo gegen einander über stehende Seiten Parallelen.

2) Parallelen zwischen Parallelen einander gleich.

3) Die Summe zweener an einer solchen Seite liegenden Winkel, als Fig. 40 cab + acd, ferner cdb + dba, = 2 R.

4) In einem Parallelogram sind alle rechte Winkel, wenn nur einer davon ein rechter Winkel.

5) Hingegen, wenn ein Winkel in einem Parallelogram schief, so sind sie alle schief.

6) In jedem Parallelogram sind die Winkel, welche einander nach der Richtung der Diagonale entgegengesetzet sind, einander gleich, also ist Fig. 40 der Winkel $s = t$, $y = x$, $n = m$.

§. 54. Bey Zeichnung der Parallelogrammen wird

1) Bey einem Quadrat nur die Länge einer Seite.

2) Bey einem Oblongo die Länge zwoer Seiten.

2) Bey einem Rhombo die Länge einer Seite, und die Größe eines Winkels.

4) Bey einem Rhomboides die Länge zwoer Seiten, und die Größe eines Winkels zu wissen erfordert.

§. 55. Durch die Zeichnung eines Rhomboides werden wir die Verfertigung der übrigen Parallelogrammen leicht lernen.

Fig. 41. Es sey also gegeben Fig. 41 die Länge a, die Länge b, der Winkel x.

Die Erwählung zu der Grundlinie ist willkührlich, sie sey hier cd, welche = a. Man setze den Winkel x nach §. 40 an c, und mache den Schenkel ce = b. Mit der Länge ce wird aus d ein Cirkelbogen gemacht, welcher aus e mit der Länge cd in f durchschnitten wird. Hierauf werden die geraden Linien ef und fd gezogen, so wird cdef dem verlangten Rhomboides gleich seyn.

Da ein Quadrat aus vier gleich langen Seiten und vier rechten Winkeln bestehet, so macht man, wenn a = der gegebenen Länge, also auch cd = a, auf die Puncte c und d rechte Winkel, und die Schenkel derselben = a, ziehet endlich beyde Endpuncte zusammen.

Auf gleiche Weise verfähret man mit einem

Oblongo, außer daß man die Schenkel beyder rechten Winkel = der andern gegebenen Länge macht.

Bey einem Rhombo wird auf die zur Grundlinie erwählte Länge, welche z. E. cd aus c, der gegebene Winkel gesetzet, dessen Schenkel = cd gemacht, übrigens verfähret man, wie bey dem Rhomboides gelehret.

§. 56. In jedem geradlinigten Dreyeck ist die Summe aller Winkel = 180 Grad oder gleich 2 R.

Den Beweis zu führen, ziehe man aus c der Spitze eines jeden geradlinigten Dreyecks mit dessen Grundlinie eine Parallele, und bezeichne alle vorhandene Winkel. So ist z. E. Fig. 42 der Winkel w = m, x = n, z = z, weil ab ∥ ef. Fig. 42.

Da nun $n + z + m = 2$ R. nach §. 31.
so muß auch $x + z + w = 2$ R. seyn.

Hieraus folget

1) Wenn in einem geradlinigten Dreyeck nur zween Winkel gegeben, so sind alle drey bekannt, weil der dritte das Complement oder die Ergänzung zu zween Rectis ist. Wenn also x und w bekannt, so sind $x + w = 2\,R - z$

also $z = 2\,R - (x + w)$

2) Da in einem gleichseitigen Dreyeck die Winkel einander gleich, so ist also einer davon $= \frac{2R}{3} = \frac{2.90^\circ}{3} = \frac{180^\circ}{3} = 60^\circ = 60$ Grad.

3) In einem gleichschenkligten Dreyeck sind zween Winkel von gleicher Größe; ist also auch nur einer davon gegeben, so sind sie alle bekannt.

4) Alle Dreyecke, in welchen eine Seite und zween Winkel, wenn sie gleich nicht an einer Seite liegen, gleich groß sind, sind kongruent.

5) In jedem geradlinigten Dreyeck kann nur ein rechter oder auch nur ein stumpfer Winkel seyn. Ist also der eine Winkel recht, so müssen die übrigen spitz seyn, weil selbige = R. Ist hingegen der eine Winkel stumpf, so müssen die übrigen um so mehr spitz seyn, weil jener größer als R, also diese kleiner als R. seyn müssen.

§. 57. In einem jeden Dreyeck ist der äussere Winkel an einer verlängerten Seite gleich der Summe beyder innern ihm entgegengesetzten Winkel; so ist z. E. Fig. 42.

Fig. 42.

der äußere Winkel $y = z + x$.

denn $y + w = 2R$, weil es Nebenwinkel.

$z + x + w = 2R$ nach §. 56.

---

also $y + w = z + x + w$

da nun $-w = -w$

---

so ist $y = z + x$.

Wenn also der äußere Winkel an der verlängerten Seite eines Dreyecks bekannt, so ist ein jeder in selbigem befindlicher Winkel bekannt, wenn nemlich das Dreyeck entweder rechtwinkligt, gleichseitig oder gleichschenkligt ist.

Fig. 43. §. 58. Wenn man Fig. 43 einen Winkel, z. E. n zwischen einer Parallele ab und cd macht, daß seine Schenkel ef und eg an selbige stoßen, folglich daselbst zween Winkel x und y bilden, so ist der Winkel n so groß als die Summe beyder Winkel x und y.

Man

Man verlängere ef bis c, und bemerke den hiedurch erhaltenen Winkel mit z, so ist der Beweis unsers Satzes folgender:

Da n der auswendige Winkel an der verlängerten Seite des Triang. ehg ist, so muß

$$n = z + y$$

ferner $z = x$, weil es Wechselwinkel

folglich $n + z = z + x + y$

da nun $-z = -z$

so ist $n = x + y$.

Das vierte Kapitel.

Die Verwandlung der bisher betrachteten geradlinigten Figuren in andere ihnen völlig gleiche.

§. 59. Ein jedes Polygon, es sey regulär oder irregulär, welches durch Diagonalen, die sich nicht durchkreuzen, in Dreyecke getheilet worden, enthält zween Triangel und drey Diagonalen weniger als es Seiten hat.

So sind z. E. in Fig. 44 und 45, wovon erstéres ein reguläres, letzteres ein irreguläres Fünfeck vorstellet, $5 - 2 = 3$ Triangel, und $5 - 3 = 2$ Diagonalen.

Der Beweis hievon ist sehr leicht. Da ein jeder Triangel drey Seiten erfordert, so werden in dem Fünfeck Fig. 44 und 45 vier Seiten zu zween Triangeln gebraucht, es bleibt also nur noch eine Sei- Fig. 44. 45.

Seite zu dem dritten Triangel übrig. Alle drey Triangel erfordern aber nur zwo Diagonalen, weil die eine zween Triangeln gemein.

§. 60. Durch die Eintheilung eines jeden geradlinigten Polygons in Dreyecke lässet sich sehr leicht die Summe aller in selbigen vorhandenen Winkel bestimmen.

Die Summe aller Winkel in einem geradlinigten Dreyeck war nach §. 56 = 2 R = 180 Grad. Es wird dahero das Product, welches durch die Multiplication der Anzahl Dreyecke, welche in dem Polygon vorhanden, mit 180° entstehet, gleich seyn der Summe aller in dem Polygon vorhandenen Winkel. Wenn nun n = der Anzahl der Seiten, so ist allgemein die Summe aller in einem jeden geradlinigten regulären oder irregulären Polygon vorhandener Winkel = 2 R. (n—2) = 180°. (n—2)

In einem Fünfeck ist also die Summe aller Winkel, oder

2 R. (n—2) = 180°. (5—2) = 180°. 3 = 540° = $\frac{540°}{90°}$ = 6 R.

§. 61. Ein jedes Quadrat läßt sich in ein Rectangel, welches von gleicher Größe, es sey dazu eine Seite gegeben oder nicht, verwandeln.

Fig. 46. Z. E. das Fig. 46 vorgestellte Quadrat soll in ein Rectangel, dessen eine Seite = der Länge n, verwandelt werden.

Man zeichne zuerst das Quadrat abcd Fig. 47, welches ≅ dem Fig. 46 gegebenen Quadrat. Man verlängere ferner Fig. 47 die Seite ab bis e

Fig. 47. und

und cd bis f, daß also ae = df = der gegebenen Länge n werde. Die Seiten ad und cb werden unbestimmt nach h und g verlängert. Ferner ziehe man ef unbestimmt nach i hin, lege durch e und d eine Diagonale, und verlängere sie, bis sie die verlängerte bc einerwärts hier in g trift, ziehe aus g mit cf eine Parallele gi, so wird Parallelogr. dhif = Quadr. abcd.

Denn ie = gb } weil Parallele zwischen Parallelen
ig = eb } gleich sind.
eg = eg

es ist also Triang. egb = Triang. egi.

Ferner, weil hdgc und adef jedes ein Parallelogram, und im erstern gd, im letztern ed die Diagonale, so ist

Triang. hdg = Triang. gdc und
Triang. fde = Triang. ead

folglich Triang. egb — (Triang. gdc + ead)
= Triang. egi — (Triang. hdg + fde.)

Da nun die Differenz des erstern = dem Quadrat abcd, und die Differenz des leztern = dem Parallelogram dhif, so ist Quadrat abcd = Parallelogram dhif.

§. 62. Ein jeder Rhombus kann in einen Rhomboides von gleicher Größe verwandelt werden. Diese Zeichnung sowohl als der Beweis sind ersterm völlig gleich.

§. 63. Alle Rectangel können nicht nur in Quadrate, sondern auch in andere Rectangel, wozu die Höhe gegeben, dem gegebenen Rectangel an Inhalt gleich, verwandelt werden.

Er-

Erſterer geometriſche Verfertigung nebſt dem Beweis werden wir in der Lehre vom Cirkel §. 138 anführen und erklären; letzterer aber iſt der §. 61 gezeigten völlig gleich.

§. 64. Diejenige Linie, auf welcher eine jede Figur gleichſam ruhet, heißet die **Baſis** oder **Grundlinie**, hingegen die aus der oberſten Spitze der Figur auf die Grundlinie gezogene Perpendikulare, die **Höhe** der Figur.

Fig. 35. So iſt z. E. Fig. 35 ab die Baſis, cd die Fig. 40 Höhe des Triangels, und Fig. 40 ab die Baſis und dc die Höhe.

§. 65. Parallelogrammen von gleichen Grundlinien und Höhen, wenn gleich deren Lage ſehr verſchieden, ſind einander an Inhalt gleich. Z. E. die Fig. 48. 49. 50 vorhandene recht- und ſchiefwinkligte Parallelogrammen ſind einander an Inhalt völlig gleich; denn daß

1) Fig. 48 abcd = ebcf

beweiſet, weil ad = bc, ef = bc } Aus der Erklärung der Parallelogrammen

also ad = ef

da nun −ed = −ed

ſo iſt ad − ed = ef − ed

es iſt aber ad − ed = ae

und ef − ed = df

folglich ae = df,

ferner

Ferner ist auch ab = cd } Aus der Erklärung der
eb = cf } Parallelogrammen
ae = df aus ersterm Beweis

---

also ist Triang. abe ≦ Triang. dcf
da nun ebcd = ebcd

---

so ist Triang. abe + ebcd = Triang. dcf + ebcd

---

nun ist Triang. abe + ebcd = abcd
und Triang. dcf + ebcd = befc

---

folglich abcd = befc.

2) Ist auch Fig. 49 abcd = becd
weil aus erst angeführtem Grunde
Triang. abd ≦ Triang. cde
und Triang. dbc ≦ Triang. dbc

---

also auch Triang. abd + dbc = Triang. cde + dbc.
Da nun Triang. abd + dbc = abcd
und Triang. cde + dbe = becd

---

so ist abcd = becd.

3) Ist auch Fig. 50 abcd = ebcf.
Denn ad = bc } Aus der Erklärung der Parab.
ef = bc } lelogrammen

---

also ad = ef
da nun de = de

---

so ist ad + de = ef + de.
Ferner ist ad + de = ae
und ef + de = df

---

also ae = df.

Da nun ab = dc
be = cf

so ist Triang. aeb ≡ Triang. dfc.
ferner ist Triang. deg ≡ Triang. deg.

also Triang. aeb — deg = Triang. dfc — deg.

Da nun Triang. aeb — deg = abdg
und Triang. dfc — deg = fegc

so ist auch abdg = fegc
ferner ist bcg ≡ bcg

also abdg + bcg = fegc + bcg

weil aber abdg + bcg = abcd
und fegc + bcg = efbc

so ist abcd = efbc.

Diese drey geführte Beweise sind auf alle Fälle, die Gleichheit zweyer Parallelogrammen von einerley Grundlinie und Höhe zu beweisen, hinreichend, weil nur diese drey Arten ihrer Lage möglich. Da also die Grundlinie und Höhe die Gleichheit aller Parallelogrammen beweiset, so giebet auch dieses die Anweisung, alle Parallelogrammen, deren Lage noch so schief, in ein rechtwinkligtes, und dieses in ein schiefwinkligtes von gleicher Größe zu verwandeln.

§. 66. Alle Dreyecke, wenn sie gleich in der Lage verschieden, aber einerley Grundlinie und Höhe haben, sind einander gleich. So sind z. E. die Fig. 51. Fig. 51 zwischen der Parallele ab und fd vorhandene Dreyecke fag und hag einander gleich, weil beyder Grundlinie und beyder Höhe einander gleich

sind,

sind, denn letztere stehen zwischen Parallelen und erstere ist = ga.

Zur Führung des Beweises ziehe man gi ∥ af, so ist af = gi, weil ag ∥ fi und Parallelen zwischen Parallelen gleich groß sind. Ferner mache man hd = ag und ziehe gd, so ist auch aus ersterm Grunde ha sowohl parallel als auch gleich gd. Beyde hiedurch entstandene Parallelogrammen afgi und aghd haben nun auch einerley Grundlinie und Höhe, folglich sind sie auch nach §. 65 von gleichem Inhalt. Ein jedes derselben ist aber durch eine Diagonale, nemlich afig, durch fg, und ahgd durch gh durchschnitten, also ein jedes nach §. 52 in zween kongruente Triangel getheilet; es muß dahero auch

Triang. afg = Triang. hag seyn.

Hieraus folget

1) Ein jedes Parallelogram bestehet aus zween kongruenten Dreyecken, und ist also doppelt so groß als ein Dreyeck von gleicher Grundlinie und Höhe.

2) Unter Dreyecken von gleicher Grundlinie, aber ungleicher Höhe, oder ungleicher Grundlinie, aber gleicher Höhe ist dasjenige das größeste, welches bey ersterm Fall von der größesten Höhe, bey letzterm hingegen die größeste Grundlinie hat.

§. 67. Ein jeder recht- spitz- oder stumpfwinkligter Triangel kann in ein recht- oder schiefwinkligtes Parallelogram von gleichem Inhalt verwandelt werden.

Bey der Verwandlung in ein rechtwinkliates

Parallelogram wird entweder die Länge einer Seite, bey der Verwandlung in ein schiefwinkligtes Parallelogram hingegen sowohl die Länge einer Seite als auch die Größe eines Winkels gegeben, oder bey beyden die Wahl derselben willkührlich gelassen.

Bey letzterm Fall hat man nur nöthig, ein Parallelogram zu verfertigen, dessen Basis = der Hälfte der Basis, und die Höhe = der Höhe des gegebenen Dreyecks; oder dessen Basis = der Basi, und die Höhe = der Hälfte der Höhe des gegebenen Dreyecks. Die auf beyde Arten entstehende Parallelogrammen sind dem gegebenen Dreyeck gleich. Es müssen also auch

Fig. 52. Fig. 52 Triang. abc = Parallelogr. decf.

Fig. 53. Fig. 53 Triang. abc = Parallelogr. bdce

Fig. 54. Fig. 54 Triang. abc = Parallelogr. edcf.

Der Beweis hievon ist sehr leicht einzusehen. Nach §. 66 bestand ein jedes Parallelogram aus zween kongruenten Triangeln von gleicher Grundlinie und Höhe. Ein jedes Dreyeck ist also die Hälfte eines Parallelograms von gleicher Grundlinie und Höhe. In angeführten Figuren ist jedesmal die Hälfte der Basis des Triangels zu der Basi der Parallelogrammen genommen, die Höhe des Triangels aber bey denen Parallelogrammen beybehalten. Es ist also ein jedes derselben halb so groß, als ein Parallelogram, dessen Grundlinie und Höhe völlig gleich der in dem Triangel befindlichen Grundlinie und Höhe, mithin eben so groß wie der gegebene Triangel.

Fig. 55. §. 68. Bey ersterm Fall, wenn Fig. 55 die

Hö-

Höhe des verlangten Parallelograms = ef und einer dessen Winkel = efh seyn soll, verfähret man folgendergestalt.

Man verlängert die Grundlinie ac des Triangels abc Fig. 55 unbestimmt nach l, und ziehet mit selbiger die Parallele bk durch die Spitze b des Triangels. Die Grundlinie ac wird in zween gleiche Theile in e getheilet, und auf e und einem der Endpuncte der Basis nach der Größe des gegebenen Winkels die Linien de und cg gezogen, und auch unterwärts nach der gegebenen Höhe, die das Parallelogram haben soll, verlängert, welches in f und h zutrift.

Durch diese Puncte wird zu der Grundlinie die Parallele fi, ferner durch f und c die Diagonale fk gezogen, bis selbige bk berühret. Aus diesem Punct ziehet man auf fi zu gh die Parallele ik, so wird clhi = dem gegebenen Triangel abc.

Denn decg = abc nach §. 67
decg = clhi nach §. 61

---

also abc = clhi.

§. 69. Ein jedes geradlinigtes reguläres und irreguläres Vieleck lässet sich in ein Parallelogram von gleichem Inhalt verwandeln. Das gegebene Polygon z. E. abcde Fig. 56 wird durch die Diagonale bd und da in Dreyecke getheilet. Ein jedes von diesen verwandelt man auf erstgezeigte Art in ein Parallelogram, und diese endlich in eines. Damit nun letzteres desto leichter verrichtet werde, so verwandelt man sämtliche Dreyecke in Parallelogrammen, deren Grundlinien oder Höhen gleich groß. Bey ersterm Fall wird die Höhe des grö- Fig. 56.

stern zu findenden Parallelograms = aller kleinen Parallelogrammen Höhen Summe, und die Basis = der Basi eines derselben. Im letztern Fall hingegen, wird die Grundlinie des größern zu findenden Parallelograms = der Grundlinie aller übrigen Parallelogrammen, die Höhe aber ist = der Höhe eines der kleinern. Da nun Fig. 56

Fig. 57. Fig. 58. Fig. 59.

Fig. 56 bdc = Fig. 57 dfgh
—— adb = Fig. 58 dFgH
ferner bde = Fig. 59 dmgn

so muß auch

bdc + adb + bde = dfgh + dFgH + dmgn.

Fig. 60. also Fig. 56 abcde = Fig. 60 fmhn seyn.

§. 70. Ein jedes Parallelogram wird in zween gleich große Trapezia getheilet, wenn man durch die Hälfte der Diagonale eine gerade Linie, in welcher Lage es wolle, ziehet.

Fig. 61. Es sind also die Fig. 61 befindliche Trapezia bdef und acef einander gleich. Denn

Triang. dac = Triang. dab
Triang. deg = Triang. agf

also Triang. dac — deg = Triang. dab — agf

folglich auch aceg = dbgf
weil nun axgf = egd

so muß aceg + axgf = dbgf + egd

also auch acef = bfed.

§. 71. Man kann verschiedene Quadrate in eines verwandeln, welches der Summe aller Inhal-

halte der gegebenen Quadrate gleich. Wir lernen solches durch das sogenannte Pythagorische Problem, welches in dem Grundsatz, daß in jedem rechtwinkligten Dreyeck das Quadrat der Hypothenuse gleich der Summe der Quadrate beyder Cathetorum, bestehet. Es ist also das an dem rechtwinkligten Dreyeck abc Fig. 62 und 63 vorhandene Quadrat acdf = der Summe der an den beyden übrigen Seiten des Triangels liegenden Quadraten akib und bchg, oder Fig. 62. 63.

acq = abq + bcq.

Dieses zu beweisen, verwandeln wir zuerst das Quadrat acdf in zwey Parallelogrammen, wovon das eine adle = akib, und das andere lecf = bchg. Dieses geschiehet durch die aus dem Punct b mit cf gezogene Parallele be. Die in dem Quadrat akib und in dem Parallelogram adle gezogene Hülfslinien kb, kc, db, dl erleichtern den Beweis, daß das Quadrat akib = dem Parallelogram adle. Denn

x = y = R. weil es Winkel im Quadrat
z = z

also x + z = y + z.

Da nun ferner ak = ab, ac = ad } Weil es Seiten eines und eben desselben Quadrats.

so ist Triang. ack = Triang. adb.

ferner ist ka ∥ ic und ka = baf. comm. von kab und ack

folglich Triang. kab = Triang. ack

Es ist auch ad ≠ be und ad = baf. comm. von adb und dal.

---

also ist Triang. adb = Triang. dal.
Da nun Triang. ack = Triang. adb
ferner Triang. kab = Triang. ack
und Triang. adb = Triang. dal

---

so muß auch Triang. kab = Triang. dal.
aber Triang. kab = ½ abik } weil dl } eine Diago.
und Triang. dal = ½ adle } und kb } nale.

---

folglich 2 Triang. kab = abik
und 2 Triang. dal = adle

---

also abik = adle.

Den Beweis des zweyten Satzes, daß

bcq = Parallelogram lcef

zu führen, erfordert in dem Quadrat bchg, und
Fig. 63. in dem Parallelogram lecf Fig. 63, welches erſterm in Fig. 62 vorgeſtellten völlig gleich, folgende gezogene Hülfslinien bg, ag, bf, lf.

Es ist alsdenn

1) Triang. acg = Triang. fbc
weil x = y = R
z = z

---

also x + z = y + z

ferner ac = cf } Weil es Seiten eines Quadrats.
cg = bc }

2) Triang. acg = Triang. bcg
denn beyde haben gleiche Basin, nemlich cg, und gleiche Höhe.

3) Triang. flc = fbc
weil beyde gleichfals gleiche Basin, nemlich fc, und gleiche Höhe haben.
Da also Triang. acg = Triang. fbc
und Triang. bcg = Triang. acg
ferner Triang. fbc = Triang. flc

---

so muß Triang. bcg = Triang. flc
da aber Triang. bcg = $\frac{1}{2}$ bchg
und Triang. flc = $\frac{1}{2}$ lecf

---

so muß auch 2 Triang. bcg = bchg
und 2 Triang. flc = lecf

---

folglich bchg = lecf
da ferner abik = adle
und bchg = lecf

---

so ist abik + bchg = adle + lecf
es ist aber adle + lecf = adcf

---

folglich muß abik + bchg = adcf oder
abq + bcq = acq.

§. 72. Durch Hülfe jetzt erklärten und bewiesenen pythagorischen Problems ist es auch sehr leicht, zwey oder mehrere gegebene Quadrate in eines von gleicher Größe zu verwandeln, oder auch ein gegebenes Quadrat so vielmal zu vergrößern, als verlangt wird.

Bey ersterm Fall hat man nur nöthig, die länge zwoer von denen gegebenen Quadraten als Schenkel eines rechten Winkels an einander zu setzen, die Endpuncte beyder Schenkel zusammen zu ziehen, so giebt diese gerade Linie die Hypothenuse, wel-

welche gleich der Seite eines Quadrats, das eben so groß wie zwey der gegebenen. Sind alsdenn noch mehrere Quadrate gegeben, so setzet man am Ende dieser Hypothenuse wieder einen rechten Winkel, macht dessen Schenkel gleich der Seite des dritten gegebenen Quadrats, ziehet wieder beyder Schenkel Endpuncte zusammen; so giebt diese Hypothenuse die verlangte Seite eines Quadrats, welches = denen dreyen gegebenen Quadraten.

Fig. 64. In Fig. 64 sey dc = der Seite des Quadrats A, und da = der Seite des Quadrats B, so muß ca = der Seite eines Quadrats seyn, welches eben so groß als die beyden gegebenen Quadrate A und B. Da nun nach ca das Quadrat C verfertiget worden, so ist auch $C = A + B$.

Soll ein Quadrat zweymal vergrößert werden, so verfährt man auf gleiche Weise. Alsdenn werden die Schenkel eines rechten Winkels gleich groß gemacht, so giebt die Hypothenuse eine Seite zu einem Quadrat, welches noch einmal so groß, als das gegebene Quadrat. Soll die Vergrößerung dreymal geschehen, so wird die erst erhaltene Hypothenuse zu dem einen, und die Länge des gegebenen Quadrats zum andern Schenkel des rechten Winkels genommen. Diese neue Hypothenuse giebt alsdenn ein Quadrat, welches dreymal so groß als das gegebene.

§. 73. Man kann auch ein Quadrat verfertigen, welches = der Differenz zwischen zweyen ungleich großen Quadraten ist. Das eben erwähnte pythagorische Problem giebt auch hiezu die Anleitung.

Die

Die Auflösung geschiehet auf folgende Art: Man macht einen rechten Winkel, z. E. bca Fig. 65, macht dessen Perpendikel cb = der Länge des gegebenen kleinsten Quadrats B Fig. 64. Mit der Länge des großen Quadrats A Fig. 64 durchschneidet man aus dem Punct b des Perpendikels die Basin ca in d und ziehet die Linie bd. Da nun selbige die Hypothenuse des Triang. bcd, so muß Fig. 65. 65.

$$\frac{bdq = bcq + cdq}{\text{also } bdq - bcq = cdq.}$$

Folglich ist cd = der Seite eines Quadrats, welches gleich der Differenz zwischen bdq und bcq.

Da nun bd = der Seite des gegebenen großen Quadrats A und bc = der Seite des gegebenen kleinen Quadrats B, so ist cd = der Seite des Quadrats D, welches gleich der Differenz der gegebenen Quadrate A und B.

Das fünfte Kapitel.

Von der Ausmessung der bisher betrachteten geradlinigten Figuren.

§. 74. Die Ausmessung aller geradlinigten Figuren bestehet in der Bestimmung des Flächeninhalts derselben. Diese Bestimmung geschiehet durch Hülfe einer Quadratfläche. Die Erwählung dieses Mittels beruhet auf dem Grundsatz, daß nur allein Dinge von einerley Art auch in Absicht

der Größe mit einander verglichen, und alle geradlinigte Figuren in ein Quadrat verwandelt werden können.

Diese zu der Ausmessung erwählte Quadratfläche erhält nach der Größe ihrer Seiten eben die §. 6 bey dem Längenmaaß angeführte Benennungen, außer daß diesen zu Unterscheidung von jenen allemal das Wort Quadrat vorgesetzet wird. Man hat also Quadratruthen, Quadratfuß, Quadratzoll, Quadratlinien u. s. w. Ihre Bezeichnung ist erstern völlig gleich. Ihre Größe steiget entweder nach dem Decimal- oder Duodecimalgesetz. Nach ersterm geben 10.10 = 100 Einheiten, und nach letzterm 12.12 = 144 Einheiten, einer niedrigern Benennung eine Einheit der nächst höhern. Der Grund von beyden ist, weil ein jedes Quadrat = gleich einer Fläche, deren Höhe gleich der Grundlinie. Die Quadratmaaße unterscheidet sich also allein dadurch von der Längenmaaße, daß selbige eine Länge und Breite, letztere aber allein eine Länge hat.

Nach dem Decimalgesetz ist also

Eine Quadratruthe = 10.10 = 100 □ Fuß.
Ein Quadratfuß = 10.10 = 100 □ Zoll.
Ein Quadratzoll = 10.10 = 100 □ Linien.

Nach dem Duodecimalgesetz hingegen ist

Eine Quadratruthe = 12.12 = 144 □ Fuß.
Ein Quadratfuß = 12.12 = 144 □ Zoll.
Ein Quadratzoll = 12.12 = 144 □ Linien.

Man bedient sich aber gewöhnlich zu der Ausmessung aller Figuren der Decimalquadratmaaße.

Die

Die Ursache ist auch bereits §. 6 angeführet. Sie erleichtert nemlich sowol bey erforderlicher Verwandlung einer großen Maaße in die ihr eigene kleinere Benennung, als auch dieser in erstere, die Multiplication und Division. Denn z. E. der Flächeninhalt einer Figur wäre = 28 □ Ruthen, 14 □ Fuß, 16 □ Zoll, und es würde verlanget, diese ganze Maaße in der vorhandenen kleinsten Benennung, also in Zolle anzuzeigen, so hätte man nur nöthig, diese Größen sämtlich an einander zu setzen, und mit der kleinsten Benennung, also hier mit Zoll, zu bezeichnen. Es wären also 28 □ R. 14 □ F. 16 □ Z. = 281416 □ Zoll.

Würde hingegen zu wissen verlanget, was für größere Benennungen in 1498703 Quadratlinien enthalten sind, so theilet man die gegebene Maaße von der rechten gegen die linke Hand in Klassen von zwey Zahlen, und bezeichnet die erhaltene Klassen auf die bey Längenmaaß gezeigte Art.

Es sind also hier 1498703 □ Linien = 1°, 49′, 87″, 03‴ = 1 □ R. 49 □ F. 87 □ Z. 3 □ L. = 1 Quadratruthe, 49 Quadratfuß, 87 Quadratzoll, 3 Quadratlinien.

§. 75. Ein Quadrat bestehet nach §. 18 aus vier gleich langen Seiten und vier rechten Winkeln. Werden diese vier Seiten in gleich große Theile getheilet, die auf jeder Parallele vorhandene Theilungspuncte mit geraden Linien zusammengezogen, so geben diese Theile eben so viele kongruente Quadrate, als das Produkt derer auf der Grund-

linie

linie und Höhe befindlichen Theile beträgt. Da
Fig. 64. also z. E. Fig. 64 eine jede Seite des Quadrats C in 10 gleiche Theile getheilet, so enthält die Fläche desselben 10 . 10 = 100 Quadrate.

Wäre nun eines von diesen kleinen Quadraten = 1 Quadratfuß, so wäre der Flächeninhalt des Quadrats C = 100 Quadratfuß, und nach §. 74 = 1 Quadratruthe.

Der Flächeninhalt eines jeden Quadrats ist also = dem Produkt der Grundlinie in die Höhe desselben. Da nun nach §. 18 die Grundlinie = der Höhe, so giebt die zu der zweyten Potenz erhobene Länge einer Seite eines Quadrats den Flächeninhalt desselben.

§. 76. Der Flächeninhalt aller Rectangel ist gleichfals = dem Produkt der Höhe und Grundli-
Fig. 13. nie derselben. Wenn also z. E. Fig. 13 ab = 13́, und ac = 6́, so ist der Flächeninhalt abcd = 13́ . 6́ = 78́ = 78 □ R. 52 □ F.

§. 77. Sowol aller Rhombi als Rhomboides Flächeninhalt ist = dem Produkt der Höhe und Grundlinie derselben. Der Beweis hievon beruhet auf der Gewißheit, daß alle Parallelogrammen von gleicher Grundlinie und Höhe, wenn gleich ihre Lage noch so schief, von gleicher Größe sind; man kann also auch ein schiefwinklichtes als ein rechtwinklichtes annehmen, welches mit ersterm gleiche Grundlinie und Höhe hat §. 65.

Fig. 14. Wenn also Fig. 14 ab = 9́, ce = 8́, so ist der Flächeninhalt des Rhombi abcd = 9́ . 8́ = 72́ = 72 □ Fuß.

Fer-

Ferner wenn Fig. 15 ab = 12′, ce = 8′, so ist der Flächeninhalt des Rhomboides abcd = 12′. 8′ = 96′ = 96 Quadratfuß

§. 78. Ein Dreyeck ist nach §. 66 die Hälfte eines Parallelograms von gleicher Grundlinie und Höhe; es muß also der Flächeninhalt eines jeden Dreyecks gleich seyn dem Produkt der Grundlinie und Höhe durch 2 dividiret. Wenn also Fig. 35 ab = 12′, cd = 141′′, so ist der Flächeninhalt des Fig. 35.

$$\text{Triang. abc} = \frac{1692''}{2} = 846 \text{ Quadratzoll} = 846''$$

= 8 Quadratfuß, 46 Quadratzoll.

§. 79. Alle geradlinigten Figuren lassen sich nach §. 59 durch Diagonalen in Dreyecke eintheilen. Es muß also auch die Summe des Flächeninhalts aller in selbigen vorhandenen Dreyecke gleich seyn dem Flächeninhalt der ganzen Figur.

Die Berechnung des Flächeninhalts aller geradlinigten Vielecke geschiehet auf folgende Art: Man theilet zuforderst das gegebene geradlinigte Vieleck in Dreyecke, berechnet eines jeden Flächeninhalt, addiret deren Produkte, so bestimmet deren Summe den Inhalt der ganzen Figur.

Da nun in dem Trapezio abcd Fig. 66 durch die Diagonale bd zween kongruente Triangel entstehen, welche bd zur gemeinschaftlichen Basi haben, so hat man nur nöthig, die Höhe beyder Triangel also ae und fc zu addiren, diese Summe mit der Länge der Grundlinie bd zu multipliciren, und das Produkt durch 2 zu dividiren, so ist dieser Quotient = dem Flächeninhalt des ganzen Trapezii abcd Fig. 66.

Fig.

Fig. 66. Auf gleiche Weise verfähret man auch mit der Berechnung des Fig. 67 vorgestelleten Trapezoides abcd.

Fig. 66. Wäre also Fig. 66 bd = 178′, ae = 72′, cf = 98″, so ist $\frac{(98+72)178}{2} = \frac{170.178}{2} = 85.178$ = 15130 □ Zoll = 1′51′30″ = 1 Ruthe, 51 Fuß, 30 Zoll Quadratmaaße und = dem Flächeninhalt des Trapezii abcd Fig. 66.

Fig. 67. Wäre ferner Fig. 67 bd = 269″, ae = 86″, cf = 76″, so ist $\frac{(86+76)269}{2} = \frac{162.269}{2} =$ 81.269 = 21789 □ Zoll = 2′17′89″ = 2 R. 17 F. 89 Z. Quadratmaaße = dem Flächeninhalt des Trapezoides abcd Fig 67.

§. 80. Die Ausmessung eines Trapezii kann auch auf folgende Art verrichtet werden. Man addiret nemlich die Länge beyder Parallelen, multipliciret diese Summe mit der Höhe des Trapezii und dividiret dieses Produkt durch 2.

Fig. 68. Z. E. in Fig. 68 ist ab ∥ cd, da nun ab = 83″, cd = 109″, so ist 83 + 109 = 192″. Die Höhe des Trapezii ist hier = ad, weil wir die Parallelen zur Grundlinie erwählet, und auf selbiger ad der Perpendikel. Wenn nun ad = 157″, so ist $\frac{157''.192'}{2}$ = 157.96 = 15072 □ Zoll = 1′5072″ = 1 R. 50 F. 72 Z. □ Maaße = dem Flächeninhalt des Trapezii abcd Fig. 68.

§. 81. Die im vorhergehenden Kapitel gezeigte

zeigte Verwandelung aller geradlinigten Figuren in andere von gleichem Flächeninhalt kann auch durch Rechnung geschehen. Die jetzt gezeigte Ausmessung derselben giebt hiezu die Anleitung.

Soll eine geradlinigte Figur in ein dem Inhalt nach gleich großes Quadrat verwandelt werden, so hat man nur nöthig, aus dem gefundenen Flächeninhalt derselben die Quadratwurzel zu ziehen, so giebt selbige die Länge der Seite eines dem Inhalt nach gleich großen Quadrats. Z. E. der Flächeninhalt des Rectangels Fig. 13 war nach §. 76 Fig. 13. $= 8^{\circ}52'$, es wird also $\sqrt{8^{\circ}52'} = \sqrt{8052'} = 89{,}732$ Fuß Längenmaaß, oder 8 Ruthen 9,732 Fuß Längenmaaß = der Seite des an Inhalt gleichen Quadrats.

Soll hingegen ein Quadrat oder andere geradlinigte Figur in ein dem Inhalt nach gleich großes Rectangel oder Triangel verwandelt werden, so muß von selbigem entweder die Grundlinie oder Höhe derselben gegeben werden, um hiedurch die entweder fehlende Höhe oder Grundlinie zu suchen. Z. E. es war der Flächeninhalt des Rectangels Fig. 13 nach §. 76 $= 8^{\circ}52'$; wenn nun dieses Rectangel in einen Triangel, dessen Grundlinie $= 68'$, verwandelt werden sollte, so würde dessen Höhe betragen 236,8... Fuß, denn Fig. 13.

$$68 \cdot \frac{x}{2} = 8052$$

$$\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad} \cdot 2$$

$$68x = 16104$$

$$\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad} : 68$$

$$x = 236{,}8\ldots$$

§. 82. Durch Hülfe der Rechnung lässet sich auch nicht nur die Länge eines Quadrats, dessen Inhalt noch ein, zwey oder mehrmal so groß, als das gegebene ist, sondern auch die Länge eines solchen Quadrats, dessen Flächeninhalt = der Differenz des Flächeninhalts zweyer gegebenen Quadrate, bestimmen.

Bey ersterm Fall wird der Inhalt so vielmal vermehret, als die verlangte Größe es erfordert, und aus diesem Product die Quadratwurzel gezogen. Z. E. der Inhalt eines Quadrats wäre 64, so würde $\sqrt{64 . 3} = 8\sqrt{3} = 8 . 1{,}73\ldots = 13{,}84$ Fuß = der Länge der Seite eines Quadrats, welches in Absicht des Flächeninhalts noch dreymal so groß, als das gegebene. Bey letzterm Fall hingegen wird der Flächeninhalt beyder gegebenen Quadrate von einander subtrahiret, und aus der Differenz die Quadratwurzel gezogen, welche alsdenn die Seite des verlangten Quadrats giebt. Wenn also z. E. der Inhalt des großen Quadrats = 64, und des kleinern = 16, so ist $\sqrt{64 - 16} = \sqrt{48} = \sqrt{16 . 3} = 4\sqrt{3} = 4 . 1{,}73\ldots = 6{,}92$ Fuß = der Länge der Seite des verlangten Quadrats.

Das sechste Kapitel.

Von der Vergleichung des Flächeninhalts geradliniger Figuren und von der Aehnlichkeit derselben, vorzüglich von der Aehnlichkeit der Dreyecke.

§. 83. Die Vergleichung geradliniger Figuren in Ansehung ihres Flächeninhalts bestehet in der Untersuchung, in welchem geometrischen Verhältnis der Flächeninhalt gleichnamigter geradliniger Figuren stehet.

§. 84. Dieses geometrische Verhältnis ist entweder **rational** oder **irrational**: Rational ist selbiges, daß, wenn man beyde Glieder des Verhältnisses mit einander vergleichet, eines in dem andern solchergestalt enthalten sey, daß sich das Verhältniß durch endliche bestimmte Größen ausdrücken lässet.

Irrational hingegen ist selbiges, wenn eben erwähnter Ausdruck nicht geschehen kann. Bey beyden Arten lässet sich die Vergleichung anstellen. Ist das erhaltene Verhältniß **rational**, so lässet sich selbiges in endlichen Größen genau bestimmen; ist es aber **irrational**, so lässet sich selbiges nur durch unendliche kleine Theile, welche **Elemente** genennet werden, ausdrücken.

§. 85. Bey der Vergleichung der Parallelogram-

logrammen in Ansehung ihres Flächeninhalts bemerken wir folgendes:

Das Verhältniß des Flächeninhalts aller Parallelogrammen von gleichen Höhen, aber verschiedenen Grundlinien, ist gleich dem Verhältniß, welches sich zwischen ihren Grundlinien befindet.

Sind hingegen die Parallelogrammen von gleicher Grundlinie, aber von ungleichen Höhen, so verhält sich ihr Flächeninhalt wie ihre Höhen.

Z. E. die Grundlinie des einen Parallelograms sey = 12°. Die Grundlinie des andern Parallelograms sey = 36°, und beyder Höhe = 4°.

Hier verhalten sich beyde Parallelogrammen in Ansehung ihres Flächeninhalts wie 12 : 36 oder 1 : 3.

Denn da der Flächeninhalt des großen Parallelograms = 36 . 4 = 144, und der Flächeninhalt des kleinen Parallelograms = 12 . 4 = 48

so ist 48 : 144 = 12 . 4 : 36 . 4

oder 48 : 144 = 12 : 36

also 48 : 144 = 1 : 3

Wäre aber die Höhe des einen Parallelogr. = 12°
und die Höhe des andern Parallelograms = 9°
ferner beyder Grundlinien = 18°
so wäre das Verhältniß in Ansehung ihres Flächeninhalts wie 9 : 12 oder 3 : 4.

Denn 162 : 216 = 9 . 18 : 12 . 18

also 162 : 216 = 9 : 12

und 162 : 216 = 3 : 4.

Sind hingegen in denen gegebenen Parallelogram-

grammen sowol die Grundlinien als Höhen ungleich, so wird das Verhältniß des Flächeninhalts **ein zusammengesetztes Verhältniß**, welches selbiges aus dem Product der Grundlinie und Höhe bestehet, und die hiedurch entstandene Proportion **eine identische Proportion** genennet, und sind alsdenn die ersten beyden Glieder gleich dem Product der beyden letzten Glieder.

Z. E. die Höhe des einen Parallelograms sey $= 8^{\circ}$, die Grundlinie desselben $= 9^{\circ}$. Die Höhe des andern Parallelograms sey $= 7^{\circ}$, die Grundlinie desselben $= 3^{\circ}$, so ist das eine $3\frac{3}{7}$mal größer, als das andere.

Denn $21 : 72 = 3 \cdot 7 ; 8 \cdot 9$

also $21 : 72 = 7 : 8 \cdot 3$

oder $21 : 72 = 7 : 24$

also $21 : 72 = 1 : \frac{24}{7}$.

§. 86. Eben diese Betrachtungen gelten auch von denen Dreyecken, weil jedes Dreyeck als die Hälfte eines Parallelograms angesehen werden kann, was also in der Proportion von dem Ganzen gesagt ist, das gilt auch von der Hälfte.

Alle Dreyecke von gleichen Höhen, aber verschiedenen Grundlinien, verhalten sich also in Ansehung ihres Flächeninhalts wie ihre Grundlinien; hingegen von verschiedenen Höhen, aber gleichen Grundlinien, wie ihre Höhen. Sind aber sowohl die Grundlinien als Höhen verschieden, so ist das Verhältniß des Flächeninhalts = dem aus der Höhe und Grundlinie zusammengesetzten Verhältniß.

§ 87. Alle Quadrate verhalten sich in Absicht des Flächeninhalts gegen einander, wie das doppelte Verhältniß, oder das Quadrat ihrer Seiten. Wenn also die Seite eines Quadrats = 9, des andern = 7, so verhalten sie sich gegen einander, wie 81 : 49.

Wäre hingegen die Seite des einen Quadrats 2, des andern 4, so werden sie sich verhalten wie 4 : 16 = 1 : 4. Oder allgemein, die Seite des einen Quadrats sey = a, des andern = 2a, so verhalten sie sich, wie $a^2 : 4a^2 = 1 : 4$. Ein Quadrat also, dessen eine Seite noch einmal so lang ist, als eines andern, hat viermal mehr Flächeninhalt.

§. 88. Alle geradlinigten Figuren kann man auf jetzt gezeigte Art in Absicht ihres Flächeninhalts vergleichen. Denn

1) lassen sich selbige in Triangel theilen §. 79.

2) Diese Triangel können in ein Parallelogram oder auch in ein Quadrat verwandelt werden §. 63 und §. 67.

§. 89. In jedem Triangel sind die durch eine in selbigem mit einer seiner Seiten gezogene Parallele abgeschnittene Stücke unter einander proportional. Es ist also in Fig. 69

Fig. 69.

1) cd : da = ce : cb

2) cd : ce = ca : cb

3) ce : de = cb : ba.

Zu Führung des Beweises ersterer beyden Sätze ist erforderlich, in Fig. 69 die Diagonalen ae und bd, ferner den Perpendikel ef auf ac aus dem Punct e zu ziehen. Es ist also alsdenn

cd

cd : da = ce : eb, denn

1) die Triangel cde und eda haben einerley Hö. he, nemlich ef, aber verschiedene Grundlinien, als cd und da, folglich kann man nach §. 86 schließen

Triang. cde : Triang. eda = cd : da.

2) Die Triangel eda und bde sind auch gleichen Inhalts, weil ed die gemeinschaftliche Grundlinie und die Höhe gleich, weil sie zwischen Parallelen ab und de stehen. Da also

Triang. cde : Triang. eda = cd : da

und Triang. bde = Triang. eda

so folget, daß Triang. cde : Triang. bde = cd : da.

3) Weil aber auch ce als die Grundlinie des Triang. cde, und eb als die Grundlinie des Triang. edb angesehen werden kann, ferner beyden der Perpendikel de gemein, so folget, daß Triang. cde : Triang. edb = ce : eb.

4) Da nun

Triang. cde : Triang. bde = cd : da und

Triang. cde : Triang. bde = ce : eb, so folget,

daß auch cd : da = ce : eb.

Es ist aber auch wahr, daß

cd : ce = ca : cb

denn ca = cd + da und cb = ce + eb.

Da nun bewiesen, daß cd : da = ce : eb, so folget,

daß cd : da + cd = ce : eb + ec

oder cd : ca = ce : cb, folglich

cd : ce = ca : cb.

Der Beweis, daß

ce : de = cb : ba

erfordert die mit ac parallele Hülfslinie eg, welche

Fig. 70. wir zu Vermeidung einer Verwirrung in Fig. 70 die ∥ Fig. 69 gezogen.

Da nun diese eg ∻ ca, so folget auch aus dem vorhergehenden, daß be : ec = bg : ga und

be + ec : ec = bg + ga : ga.

Es ist aber nach §. 53 ag = de, weil ag ∻ de und ad ∻ eg Man kann also auch für ag die de setzen, folglich

be + ec : ec = bg + ga : de

oder bc : ec = ab : de

also ec : de = bc : ab.

§. 89. Wenn in einem Triangel noch mehrere Parallelen gezogen würden, so müssen auch die dadurch abgeschnittene Stücke der Seiten des Triangels einander proportional werden. Da also Fig. 71. Fig. 71 ab ∻ fg ∻ de, so folget, daß

cd : ca = ce : cb

cd : cf = ce : cg

cd : df = ce : eg u. s. w.

§. 90. Auf jetzt angeführte Sätze gründet sich die Auflösung folgender Aufgaben.

Erste Aufgabe.

Eine gerade Linie in verlangte gleiche Theile zu theilen.

Auflösung.

Fig. 72. Die gegebene gerade Linie sey Fig. 72 ab, welche in 5 gleiche Theile getheilet werden soll. An einem ihrer Endpuncte ziehet man eine gerade Linie unter einem zwar beliebigen, jedoch nicht zu spitzen oder zu stumpfen Winkel, z. E. wie hier ac, trägt auf selbige 5 gleiche Theile von beliebi-

ger

ger Größe. Durch den Punct c und den Endpunct b der gegebenen Linie ziehe man die gerade Linie cb und zu selbiger aus allen Theilungspuncten g, f, e, d der Linie ca Parallelen, so erhalten wir die Linie ab in 5 gleiche Theile getheilet. Der Beweis hievon gründet sich auf §. 89. Denn weil cb ∥ gl ∥ fk ∥ ei ∥ dh, so folget,

daß cg : gf = bl : lk
gf : fe = lk : ki
fe : ed = ki : ih
ed : da = ih : ha

Da nun die ersten Glieder der Proportion unter einander gleich, also ein jedes = 1, so ist das Verhältniß unter einander = 1 : 1, folglich ist die Linie ab in verlangte gleiche Theile getheilet.

Zwote Aufgabe

Eine gerade Linie in solche Theile zu theilen, die mit den Theilen einer andern Linie ein gleiches Verhältniß haben.

Auflösung.

Die gegebene Linie sey ab Fig. 73, das bestimmte Verhältniß der Theile sey = denen Linien ad, af, ae. Fig. 73.

Man verfährt auf eben erst gezeigte Art, daß man an dem Endpunct der gegebenen Linie ab, z. E. aus a die Linie ac ziehet, auf selbige die Länge der gegebenen Linien ae, af, ad setzet, die Endpuncte beyder Linien ab und ad durch db verbindet, und zu db durch die Theilungspuncte Parallelen ziehet, so befindet sich zwischen denen Theilen der Linie ab als ag, ah, ab eben das Verhältniß,

welches zwischen ae, af, ad ist. Man kann also schließen

$$ae : af = ag : ah$$
$$ae : ad = ag : ab \text{ u. s. w.}$$

Dritte Aufgabe.

Zu drey gegebenen geraden Linien die vierte Proportionallinie zu finden.

Auflösung.

Die drey gegebene Linien sollen ba, bd, de Fig. 74 seyn. Man ziehet also die gerade Linie bd, setzet an dem Endpunct derselben, z. E. an d, unter einem beliebigen Winkel die Länge de, und ziehet die Linie be. Beyde Schenkel bd und be des hiedurch entstandenen Triangels bde werden verlängert, daß sowohl bd als be eine jede der gegebenen dritten Linie ab gleich wird. Endlich ziehet man die Endpuncte a und e dieser verlängerten Schenkel durch die Linie ac zusammen, so ist, weil ac $\#$ de, diese ac $=$ der vierten, zu denen dreyen gegebenen Linien gesuchte Proportionallinie. Folglich, da bd : de $=$ ba : ac

$$\text{so ist } ac = \frac{deba}{bd}$$

oder ac $=$ dem Quotienten des Products de mit ba dividiret durch bd. Wenn also bd $=$ 150″, de $=$ 135″, ba $=$ 294″, so ist $ac = \frac{135 \cdot 294}{150}$

$=$ 264,6 Zoll $=$ 2 R. 6 F. 4,6 Z.

Fig. 74.

§. 91. Wenn die Endpuncte der Schenkel eines in zween gleiche Theile getheilten Winkels

mit

mit einer geraden Linie verbunden werden, so werden die durch die Theilungslinie auf selbiger entstandene Theile sich verhalten, wie die Schenkel des Winkels.

Der gegebene Winkel sey abc Fig. 75. Man theile selbigen nach der §. 40 gelehrten Art durch db in zween gleiche Theile, und ziehe willkührlich die Linie ac, doch so, daß selbige durch db berühret wird, so muß Fig. 75.

$$ab : bc = ad : dc.$$

Den Beweis zu führen, verlängere man ab nach e bis $be = bc$ und ziehe hierauf die Grundlinie ec. Hiedurch entstehet der gleichschenkligte Triangel bce, weil $bc = be$, folglich auch nach §. 41 $n = m$.

Es ist also der Winkel $abc = n + m$ nach §. 57.

Da nun $n = m$

so ist auch der Winkel $abc = m + m = 2m$.

Es ist aber auch der Winkel $abc = 2abd$, weil der Winkel in zween gleiche Theile getheilet worden, also auch $2abd = 2m$

folglich $abd = m$.

Es ist ferner nach §. 49 db ∥ ce, mithin verhält sich $ab : be = ad : dc$

da nun $bc = be$ ex constructione

so verhält sich auch $ab : bc = ad : dc$.

§. 92. Alle Dreyecke, sie mögen in ihrer Größe noch so verschieden seyn, wenn in selbigen nur die Winkel einander gleich, sind einander ähnlich, und die Seiten, welche in selbigen einerley Winkeln entgegengesetzet und gleichna-

migte Seiten oder latera homologa genennet werden, sind auch einander proportinal. Z. E. in denen Dreyecken abc und def Fig. 76 und Fig. 77 ist der Winkel x = v, z = u, y = w, es ist also

Fig. 76. 77.

Triang. abc ∽ Triang. def.

Denn sie sind in der Lage ihrer Seiten, welche durch die Winkel bestimmet werden, einander völlig gleich, nur in der Größe der Seiten sind sie verschieden. Sind aber die Winkel in beyden Triangeln gleich und beyder Grundlinien werden auf einander gelegt, so sind beyder Schenkel parallel, man mag nun zur Grundlinie wählen, welche Seite man will; man kann also schließen

ac : ab = de : df
ac : cb = de : ef
ab : bc = df : ef.

Wenn aber auch nur zween Winkel in denen gegebenen Dreyecken gleich groß sind, so haben dennoch erwähnte Proportiones ihre Gültigkeit, weil allemal der dritte fehlende Winkel nach §. 56 das Complement zu 180° ist.

§. 93. Wenn von zwey ähnlichen Dreyecken drey Seiten gegeben, so lässet sich die vierte fehlende durch die Regula Detri finden, denn sie machen eine wahre geometrische Proportion aus. Z. E. es wären von denen §. 92 angeführten Triangeln Fig. 76 und Fig. 77 die Seiten ac, ab, de bekannt, man suchte die df, welche = x, da

nun ac : ab = de : x

so wäre $\frac{ab \cdot de}{ac} = x = df.$

§. 94.

§. 94. Aehnliche Dreyecke verhalten sich in Ansehung ihres Flächeninhalts

1) wie die Quadrate ihrer ähnlich liegenden Seiten, man nehme auch welche ähnlich liegende Seite man wolle. Oder auch

2) wie die Quadrate ihrer Höhen.

Die gegebene ähnlichen Dreyecke mögen Fig. 76 und 77 Triang. abc und Triang. def seyn, im erstern ist ad und im letztern dg = der Höhe. Es muß also

1) Triang. abc : Triang. def = bcq : efq

2) Triang. abc : Triang. def = adq : dgq.

Erster Beweis.

Daß Triang. abc : Triang. def = bcq : efq.

Denn Triang. abc ∽ Triang. def und Triang. abd ∽ Triang. dfg, weil in beyden sowohl ad als dg = R. Ferner nach §. 92 abd = dfg, bad = fdg u. s. w. Es gilt also der Schluß

df : ab = dg : ad

und df : ab = ef : bc

ferner ef : bc = dg : ad

folglich ist $\frac{bc \cdot dg}{ef} = ad.$

Da nun nach §. 78

Triang. abc : Triang. def = $\frac{bc \cdot ad}{2} : \frac{ef \cdot dg}{2}$ ferner

Triang. abc : Triang. def = bc . ad : ef . dg

so muß auch, wenn für ad der gefundene Werth $\frac{bc \cdot dg}{ef}$ gesetzt wird,

Triang. abc : Triang. def = bc. $\frac{be.dg}{ef}$: ef.dg ferner

Triang. abc : Triang. def = bc . be . dg : ef . ef . dg

und

Triang. abc : Triang. def = bc . be : ef . ef folglich

Triang. abc : Triang. def = bcq : efq.

Zweyter Beweis.

Daß Triang. abc : Triang. def = adq : dgq.

Da bereits erwiesen, daß df : ab = dg : ad, und df : ab = ef : bc, so folget, daß dg : ad = ef : be

also $\frac{ad.ef}{dg}$ = be. Ferner ist bekannt, daß

Triang. abc : Triang. def = bc . ad : ef . dg

da nun be = $\frac{ad.ef}{dg}$ so muß auch

Triang. abc : Triang. def = $\frac{ad\ ef}{dg}$. ad : ef . dg und

Triang. abc : Triang def = ad . ad . ef : ef . dg . dg

oder

Triang. abc : Triang. def = ad . ad : dg . dg folglich

Triang. abc : Triang. def = adq : dgq.

Wenn also

1) zwo gleichnamigte Seiten zweener ähnlichen Triangel bekannt, so kann man das Verhältniß des Inhalts beyder Triangel bestimmen. Es sey

Fig. 76. 77. z. E. Fig. 76 ab = 8 und Fig. 77 df = 4, so wäre das Verhältniß beyder Triangel Inhalts

abq : dfq = $8^2 : 4^2 = 64 : 16 = \frac{64}{16} : \frac{16}{16} = 4 : 1$

also Triang. abc wäre viermal so groß, als der Triangel def.

2)

2) Aus dem Inhalt des einen nebst zwo bekannten gleichnamigten Seiten beyder Triangel lässet sich auch der Inhalt des andern bestimmen. Z. E. der Inhalt des Triangels abc wäre = 12″; da nun ab = 8 und df = 4, so würde der Inhalt des Triang. def = 3 Zoll. Denn

abq : dfq = Tr. abc : Tr. def

oder 64 : 16 = 12 : x

$$\text{also } \frac{16.12}{64} = x = \frac{16.12 : 16}{64 : 16} = \frac{12}{4} = 3.$$

Beydes lässet sich auch aus denen Quadraten der Höhen herleiten.

§. 95. Aehnliche Figuren verhalten sich wie die Quadrate, sowohl ihrer ähnlich liegenden Seiten, als auch ihrer Diagonalen.

Der Beweis beruhet auf der Gewißheit, alle ähnliche Figuren in ähnlich liegende Dreyecke einzutheilen. Diese Eintheilung geschiehet durch die zwischen den Spitzen gleicher Winkel gezogene Diagonalen. Diese Diagonalen sind also auch gleichnamigt oder ähnlich liegend.

Hier Fig. 79 und Fig. 80 sind, weil beyde Figuren ähnlich, in nichts von einander unterschieden, als in der Größe. Alle Winkel sind in selbigen einander gleich, auch alle Seiten in beyden Figuren haben ein gleiches Verhältniß der Größe gegen einander, so, daß z. E. ab noch einmal so groß als fg, auch bc eben so vielmal größer als gh u. s. w., es müssen dahero auch die Triangel, da in beyden Figuren die Diagonalen eine gleiche La- Fig. 79. 80.

ge gegen die ihnen überstehenden Winkel haben, einander gleich seyn. Es werden also auch die Figuren noch ähnlich seyn, wenn man auch von beyden ähnliche Triangel abnähme; man mag also in den beyden Figuren einen Triangel, und von demselben eine Seite wählen, welche man will, so wird mit dem ihm ähnlichen in der andern Figur vorhandenen Triangel das Verhältniß seyn, wie das Verhältniß der Quadrate ihrer ähnlich liegenden Seiten. Also z. E.

Triang. abc : Triang fgh = bcq : ghq
oder auch acq : fhq.

Da die Verhältnisse der Seiten beyder Figuren alle einerley, so würde man auch sagen können

Triang. abc : Triang. efh : bcq : ghq
Triang. acd : Triang. fhi : bcq : ghq
Triang. aed : Triang. fki : bcq : ghq

Da also das Verhältniß aller gleichnamigten Triangel einer einzigen Verhältniß gleich ist, so folget auch, daß

Triang. abc + acd + aed : Triang. fgh + fhi + fki = bcq : ghq, oder auch wie abcdea : fghikf = bcq : ghq, oder auch acq : fhq, oder wie jede andere gleichnamigte zwo Seiten oder Diagonalen.

§. 96. Es lässet sich aber auch das Verhältniß der Peripherien oder aller Linien, die ähnlich geradlinigten Figuren umgränzen, hieraus bestimmen. Denn wenn aus dem vorhergehenden

ab : fg

$$ab : fg = ab : fg$$
$$bc : gh = ab : fg$$
$$cd : hi = ab : fg$$
$$de : ik = ab : fg$$
$$ea : kf = ab : fg$$

$$\frac{ab + bc + cd + de + ea : fg + gh + hi + ik + kf}{= ab : fg}$$

oder abcdea : fghikf = ab : fg, oder die ganze Peripherie wie ein Paar ähnlich liegende Seiten. Z. E. ein Paar ähnlich liegende Seiten mögen seyn wie 8 : 6 = 4 : 3, so verhalten sich auch die ganzen Peripherien gegen einander, wie 4 : 3.

§. 97. Auf jetzt angeführte Betrachtungen gründet sich sowohl die Verfertigung als der Gebrauch des sogenannten verjüngten Maaßstabes. Dieser Name ist selbigem deswegen beygelegt, weil durch dessen Beyhülfe alle Figuren mit Beybehaltung der Aehnlichkeit kleiner vorgestellet werden können. Wir werden hier nur die Verfertigung des zehntheiligen verjüngten Maasstabes lehren, weil selbiger in der Geometrie aus denen bey dem Decimalmaaß §. 74 angeführten Ursachen eingeführet. Die Verfertigung desselben bestehet kürzlich in folgenden:

1) Man ziehet eine gerade Linie von willkührlicher Länge, z. E. AB Fig. 81, und theilet selbige in 10 gleiche Theile. Fig. 81.

2) Auf beyden Endpuncten derselben richtet man die Perpendikularen AE, BF gleichfalls von willkührlicher Länge auf, und theilet selbige auch in 10 gleiche Theile.

3)

3) Durch die Theilungspuncte dieser Perpendikularen AE, BF ziehet man zu AB Parallelen als 9l, 8m, 7n, u. s. w.

4) Auf die Grundlinie AB ziehet man aus E auf 9 eine gerade Linie, und zu dieser aus denen übrigen Theilungspuncten der Grundlinie, Parallelen, als u8, v7, w6, u. s. w.

5) Die Grundlinie AB verlängert man willkührlich, und setzet auf selbige aus B nach D die Länge AB so vielmal als man will, ziehet aus diesen Puncten, z. E. C und D zu AE Parallelen bis an die gleichfalls verlängerte Linie EF, so ist ein zehntheiliger verjüngter Maaßstab verfertiget, auf welchem AB, wenn selbiges = 1 Ruthe, in 10. 10 = 100 Zoll eingetheilet. Wenn die AB zehnmal genommen ist, so nennet man diesen Maaßstab auch einen 1000theiligten Maaßstab, weil, wenn man die zehnmal genommene AB als eine Einheit ansiehet, selbige durch die zwischen AE und EF sich befindende Linien und Theile so getheilet ist, daß man von 1 bis 1000 auch alle einzelne Theile davon abnehmen kann.

So ist z. E. wenn die ganze Länge des Maaßstabes die AB zehnmal genommen als 1 angesehen wird, die AB selbst $\frac{1}{1\circ}$, ein Theil davon als B1 = $1\frac{1}{\circ\circ}$, und ein Theichen als tp = $1\frac{1}{\circ\circ\circ}$, 5X = $1\frac{2}{\circ\circ\circ}$ u. s. w.

Den Beweis hievon suche man in dem Buche, wovon dieses der Auszug ist, weil er hier, wenn er deutlich seyn sollte, zu viel Platz eingenommen hätte.

Der

Der Gebrauch dieses verjüngten Maasstabes ist folgender:

Man will z. E. eine Länge von 2°6′7″ darauf nehmen, so setzet man den einen Fuß des Cirkels in D, öfnet selbigen von D nach A bis in 6. Mit dieser Oefnung fähret man mit dem Cirkel heraufwärts bis auf die Linie 7n, und öfnet ihn bis in φ; da nun BD = 2 Ruthen, nφ = 67 Zoll, so wird BD + nx = der verlangten Länge von 2°6′7″ = 2 Ruthen 6 Fuß 7 Zoll seyn.

Das siebende Kapitel.

Vom Cirkel, seinen Linien, Winkeln, darinnen beschriebenen Figuren, Inhalt, Verwandlung und Verhältnissen.

§. 98. Was ein Cirkel ist, wie er entstehet, die Benennung seiner Linien, seiner Aus- und Abschnitte ꝛc. ist in dem ersten Kapitel §. 20 hinlänglich erkläret. Dieses Kapitel ist allein denen Eigenschaften des Cirkels gewidmet. Wir bemerken hiebey folgendes.

§. 99. Alle Cirkel von gleichen Radiis sind kongruent; denn der Radius eines Cirkels ist das Maaß der Entfernung der Peripherie vom Centro. Es müssen also die Peripherien derer Cirkel gleich weit vom Centro abstehen, deren Radii einander gleich, folglich schließen diese Cirkel auch gleich großen Raum ein.

§. 100. In jedem Cirkel sind die Sehnen oder Chorden gleicher Bogen einander gleich. Da
Fig. 82. also Fig. 82 der Bogen afb = dem Bogen egd, so muß auch ab = ed seyn.

Zur Führung des Beweises ziehe man von jedem Endpuncte beyder Chorden die Radii bc, ac, ec, cd, so werden die hiedurch entstandene Triangel abc und edc kongruent, oder

Triang. abc ≅ Triang. edc.

Denn ac = cd = cb = ec, weil sie Radii, die alle nach §. 21 einander gleich, ferner x = 9, weil sie durch gleiche Bogen nach unserer Voraussetzung gemessen werden. Weil nun zwo Seiten und der eingeschlossene Winkel einen Triangel bestimmen, und dieses in beyden gleich, so folget, daß auch ab = ed.

§. 101. Ein auf dem Mittelpunct einer Sehne von einem Ende der Peripherie bis zu dem andern Ende gezogener Perpendikel gehet

1) durch das Centrum des Cirkels,

2) theilet sowohl den Bogen der Sehne, als auch den ganzen Cirkel in zween kongruente Theile.

Fig. 83. Es ist also Fig. 83 af ≅ fd, und fde ≅ eaf. Denn durch die an beyde Endpuncte der Chorde ad gezogene Radii ac und cd entstehet der gleichschenkligte Triangel acd.

Weil nun nc = einem Perpendikel, so wird der Triangel acd durch selbigen in zween kongruente Theile getheilet, folglich ist

Triang. anc ≅ Triang. dnc.

Es

Es ist ferner nc in einerley Richtung sowohl nach e als f verlängert, und gehet durch das Centrum c. Da nun Winkel ncd = Winkel nca und die zu diesen gehörige Nebenwinkel dce = Winkel eca, so muß

ncd + dce = nca + eca.

Es messen aber die Winkel ncd = Bogen fd,
dce = Bogen de
eca = Bogen ea
acn = Bogen af

folglich ncd + dce = fd + de und nca + eca = af + ea, also Bögen fd + de = af + ea, oder Bogen fde ≙ Bogen eaf.

§. 102. Die Entfernung gleicher Sehnen oder Chorden eines Cirkels vom Centro desselben ist einander gleich. Da also Fig. 84 ad = eg, so ist auch hc = cl. Fig. 84.

Die Linien hc und cl sind zween Perpendikel, also das Maaß der Entfernung beyder Chorden vom Centro, und bey h und l sind rechte Winkel.

Man ziehe die Hülfslinien dc und ec. Da nun nach vorhergehendem §. 101 hd = ah, ferner ad gleich gemacht eg, so muß auch aus erstem Grunde el = lg, folglich hd = el = ah = lg, also auch ab = bd = ef = fg und abd = efg seyn.

Es ist ferner der Winkel dhc = Winkel elc = Recto, ferner der Winkel hdc = dem Winkel lec, weil, da bcd = ecf, indem sie von gleichen Bogen ex hypothesi gemessen werden, also hdc und lec gleiche Complemente zu 180° sind. Da

nun hd = el und cd = ce, weil es Radii, und der Winkel hdc = Winkel lec, so ist auch

Triang. hdc ≅ Triang. lec.

Da nun zwo Seiten und der eingeschlossene Winkel in beyden gleich, so muß auch die Entfernung beyder Sehnen vom Centro gleich seyn, oder es ist ch = cl.

§. 103. Eine jede Sehne oder Chorde, welche durch das Centrum eines Cirkels gezogen ist, wird = Diameter.

Alle Sehnen, welche also nicht durch das Centrum gezogen, sind kleiner als der Diameter. Da
Fig. 83. also Fig. 83 ad nicht durch das Centrum gezogen, so ist selbige kleiner als der Diameter.

Ohnerachtet dieser Satz keines Beweises bedarf, so wollen wir selbigen dennoch anführen. Es ist also Fig. 83

ad < ef.

Denn in dem rechtwinkligten Dreyeck dnc ist dc = der Hypothenuse, also nach §. 44 die gröste Seite. Da nun dc hier zugleich = Radio, nd = $\frac{1}{2}$ Chorde, so ist der Radius größer als $\frac{1}{2}$ Chorde. Der Diameter ist aber = zween Radiis, folglich ist auch dieser größer als zwo halbe oder eine ganze Chorde. Da also

ad = der Chorde
ef = dem Diameter

---

so ist ad < ef.

§. 104. Unter zwo Sehnen, deren Entfernung vom Centro verschieden, ist die kleinste, welche am weitesten vom Centro entfernt. Es wer-

den

den also die Sehnen immer kleiner, je mehr selbige vom Centro entfernet worden; sie verschwinden, wenn sie zuletzt in die Peripherie fallen.

§. 105. Auf die bisher angeführten und bewiesene Sätze gründet sich die Auflösung folgender Aufgaben.

Erste Aufgabe.

Zu einem gegebenen Cirkelbogen den Mittelpunct, welcher nur bekannt, zu finden.

Auflösung.

Man ziehet in dem gegebenen Bogen z. E. Fig. 85 abd zwo Chorden von willkührlicher Lage als ab, bd, theilet eine jede derselben in zween gleiche Theile, und setzet auf die Mitte derselben die Perpendikel fc und gc, wo diese sich schneiden, wie hier in c, da ist das Centrum. Fig. 85.

Der Beweis hievon ist sehr leicht, denn ein jeder auf der Mitte einer Chorde gefälleter Perpendikel gehet verlängert durch das Centrum eines Cirkels nach §. 101, es müssen also auch fc und cg durch das Centrum gehen.

Ein jeder Cirkel hat aber nur einen Mittelpunct, und zwo convergirenden geraden Linien ist nur ein Punct, in welchem sie sich schneiden, eigen, folglich muß c das Centrum des Bogens abd seyn.

Zwote Aufgabe.

Durch drey gegebene Puncte, welche nicht in gerader Linie liegen, einen Cirkelbogen zu ziehen.

Auflösung.

Fig. 86. Dieses Verfahren und der Beweis ist erst gezeigtem völlig gleich.

Man ziehet nemlich nach dem mittelsten Punct b, von jedem der beyden andern, gerade Linien ab und bd, theilet eine jede in zween gleiche Theile, und setzet auf jeder Mittelpunct die Perpendikularen fc und cg, so ist der Durchschnittspunct c = dem Centro eines Cirkels, dessen Peripherie durch alle drey gegebene Puncte gehet.

Dritte Aufgabe.

Einen jeden Triangel in einen Cirkel einzuschließen, daß dessen Spitzen die Peripherie desselben berühren.

Auflösung.

Man theilet zween Seiten des gegebenen Fig. 87. Triangels, z. E. Fig. 87 ab und bd, in zween gleiche Theile, richtet auf beyder Mitte hereinwärts Perpendikel, wo selbige sich schneiden, ist das Centrum des Cirkels, dessen Peripherie die Spitzen des gegebenen Triangels abd berühret.

Der Beweis ist ersterm gleich. Wir bemerken nur noch, daß die Peripherie eines um einen gleichseitigen Triangel beschriebenen Cirkels in drey gleiche Theile getheilet wird, denn alle drey Seiten sind = dreyen Chorden; da nun eine so groß als die andere, so müssen auch die Bogen, welche ihnen eigen, einander gleich seyn.

§. 106. Eine jede Tangente berühret nur an einem Ort die Peripherie des Cirkels, und der Winkel, welcher durch die Tangente und der aus

sel-

seinem Berührungspunct nach dem Centro des Cirkels gezogenen geraden Linie entsteht, ist = Recta.

Man setze nemlich auf den Radius ac des Cirkels Fig. 88 die winkelrechte Linie bd, und ziehe ferner die Linie cd, so ist bd = Tangens, und a = dem einzigen Berührungspunct derselben, ferner der Winkel cad = Recto. Denn Fig. 88.

1) daß a der einzige Berührungspunct der Tangente, beweisen wir auf folgende Art:

Da der Triang. cad = Triang. rectang., und cd dem Winkel a, welcher = R. entgegen gesetzt, so muß cd > als ac seyn.

Nun ist aber ca = cf = Radio, also cd > cf, folglich ist der Punct d gewiß außer der Peripherie. Da bey allen Puncten der Linie bd eben dasselbe Verfahren Statt findet, also auch selbige sämtlich außer der Peripherie sich befinden, so ist a der einzige Berührungspunct.

2) Daß der Winkel cad = Recto, beweiset, weil ca auf bd winkelrecht gesetzet; da nun in jedem Triangel nur ein rechter Winkel seyn kann, und die Hypothenuse cd diesem Winkel cad entgegen gesetzet ist, so muß auch cad = Recto seyn. Es ist aber bad = tangens und ca = Radio, mithin folget, daß ein jeder Radius winkelrecht auf dem Berührungspunct einer Tangente stehet.

§. 107. Alle Cirkellinien, welche einander von außen oder innen berühren, haben auch nur einen Berührungspunct mit einander gemein, weil sie sonst sich einander durchschnitten.

§. 108. Die vornehmsten Winkel, welche wir an, in und um einen Cirkel bemerken müssen, sind folgende. Fig. 89. Fig. 89.

1) Der Winkel an dem Mittelpunct, Centriwinkel, angulus ad centrum, dessen Scheitel c an das Centrum, und die Schenkel bc und ac an die Peripherie des Cirkels stoßen, also x = Centriwinkel.

2) Der Winkel an der Peripherie, Peripheriewinkel, angulus ad peripheriam, dessen Scheitel d sowohl als Schenkel de, df die Peripherie berühren, es ist also y = Peripheriewinkel.

3) Der Winkel über der Peripherie, dessen Scheitel g außer der Peripherie die Schenkel gh und gi auf der Peripherie stehen, oder z = Winkel über der Peripherie.

§. 109. Die Größe des Centriwinkels bestimmt der Bogen, auf welchem er stehet. Da also Fig. 89

ac = ab = Radio, so ist x = ab.

Die Größe des Peripheriewinkels ist = der Hälfte eines Centriwinkels, dessen Schenkel auf einem eben so großen Bogen stehen.

Die verschiednen Bogen, welche der Peripheriewinkel gegen den Centriwinkel hat, sind folgende drey.

1) Beyde Winkel haben einen Schenkel gemein, wie z. E. Fig. 90, in welcher des Centriwinkels x verlängerter Schenkel ac auch der Schenkel des Peripheriewinkels y; es muß also hier Fig. 90.

$y = \frac{x}{2}$ seyn.

Denn

Denn $x = y + z$, weil x = dem Winkel an der verlängerten Seite

$y = z$, weil cd = db = Radio

also $x = y + y = 2y$

folglich $\frac{x}{2} = y$.

2) Beyder Winkel Schenkel Endpuncte berühren einander, ohne sich zu schneiden. Fig. 91, Fig. 91.

so ist $y + z = \frac{u+x}{2}$.

Man theile den Peripheriewinkel sowohl als den Centriwinkel durch die Hülfslinie de in zween gleiche Theile, so ist.

$u = y + r$, weil es der Winkel an der verlängerten Seite

$y = r$, weil cd = ac = Radio

also $u = y + y = 2y$.

ferner ist $x = s + z$, weil es der Winkel an der verlängerten Seite

$s = z$, weil cd = db = Radio

also $x = z + z = 2z$.

Da nun $u = 2y$

und $x = 2z$

so ist $u + x = 2y + 2z$

also $\frac{u+x}{2} = y + z$.

3) Beyder Winkel Schenkel Endpuncte berühren einander, nachdem zuvor der Schenkel des

einen Winkels den Schenkel des andern durchschnitten.

Fig. 92. Es muß also auch hier Fig. 92 $z = \frac{x}{2}$.

Man ziehe die Hülfslinie den Diameter ed, alsdenn ist

$$u + x = y + z + n$$

$y + z = n$, weil $cb = cd =$ Radio

---

also ist $u + x = y + z + y + z = (y + z)2$

ferner ist $u = 2y$, aus dem vorhergehenden

also $u + x - u = 2y + 2z - 2y$

folglich $x = 2z$

und $\frac{x}{2} = z$.

Es hat also ein jeder Peripheriewinkel zu seiner Maaße den halben Bogen, worauf er stehet, also Fig. 90 $\frac{ab}{2} = y$, Fig. 91 ist $\frac{ab}{2} = y + z$, Fig. 92 ist $\frac{ab}{2} = z$.

Alle Peripheriewinkel, deren Bogen, auf welchen sie stehen, von gleicher Größe, sind unter einander gleich, und alle Winkel an der Peripherie, die auf eben demselben Bogen stehen, sind ohnerachtet der Verschiedenheit ihrer Lage einander völlig gleich.

§. 110. Alle Peripheriewinkel, welche auf dem Diameter stehen, sind rechte Winkel, folglich

Fig. 93. einander gleich; es ist also Fig. 93

$$x = y = z = \text{Recto}.$$

Denn

Denn die Hälfte des Bogens ab ist das Maaß, welches ihre Größe bestimmt, da nun ab = der Hälfte des Cirkels, so ist dessen Hälfte = $\frac{1}{4}$ des ganzen Cirkels, = $\frac{360}{4}^{\circ} = 90^{\circ}$.

§. 111. In einem jeden regulären und irregulären Viereck, Fig. 94 ist allemal die Summe zweener einander entgegengesetzten Winkel = zween Rectis = 180°. Fig. 94.

Zur Führung des Beweises ziehe man um die Figur 94 einen Cirkel, daß dessen Peripherie von allen Scheiteln der Winkel des Vierecks berührt werde, hiezu giebt §. 105 die Anleitung, ferner ziehe man die Diagonalen ad und gb.

Nun ist die Summe aller Winkel in einem Viereck = 4 R. = 360°, weil sich selbiges in zween Triangel theilen lässet. Es ist also nur zu beweisen, daß zween entgegengesetzte Winkel, z. E. dga + abd = 2 R. = 180°, so folget es von den andern beyden von selbst.

Da also adg + dga + gad = 2 R. = 180°
und adg = abg, weil es Peripheriewinkel auf einer Sehne §. 109

folglich abg + dga + gad = 2 R. = 180°
ferner ist auch gad = gbd, weil es Peripheriewinkel auf einer Sehne.

und abg + dga + gbd = 2 R. = 180°,
ferner abg + gbd = abd
also ist dga + abd = 2 R. = 180°.

§. 112. Der Winkel außer der Peripherie eines Cirkels Fig. 95 hat zu seinem Maaß die halbe Diffe-

Differenz der beyden Bogen, auf welchem seine Schenkel in und außer dem Cirkel stehen, oder sein Maaß bestimmet die halbe Differenz der Bogen, die seine verlängerte Schenkel schneiden. Es ist also Fig. 95

Fig. 95. $\frac{bd-fe}{2} = x =$ dem Winkel außer der Peripherie.

Man ziehe die Hülfslinie fd. Hiedurch erhalten wir zween Peripheriewinkel u und y. Von ersterm ist $\frac{bd}{2}$ und von letzterm $\frac{ef}{2}$ das Maaß.

Nun ist $u = y + x$ nach dem §. 109 angeführten Grunde

ferner $\frac{bd}{2} = \frac{fe}{2} + x$

also $\frac{bd}{2} = \frac{fe}{2} = x$

folglich $\frac{bd-fe}{2} = x$.

§. 113. Was ein reguläres und irreguläres Polygon sey, daß beyde Arten durch Diagonalen in Triangel getheilet werden können, ist bereits §. 59 gezeiget.

Wir behaupten jetzt, daß in einem jeden regulären Polygon, z. E. Fig. 96.

1) Alle Triangel, welche durch die aus denen Ecken durch das Centrum gezogene Diagonalen entstehen, kongruent sind.

2) Alle in selbigem befindliche Centriwinkel einander gleich.

3)

3) Alle Polygonwinkel desselben von gleicher Größe sind.

Es ist also Fig. 96. Fig. 96.

1) Triang. fca ≅ Tr. acb ≅ Tr. bcg u. s. w. Denn fc = ac = bc = gc, weil es sämtlich Radii fa = ab = bg ex constructione eines regulären Polygons folglich Triang. fca ≅ Triang. acb ≅ Triang. bcg u. s. w., weil drey Seiten einen Triangel bestimmen.

2) Die sämtlichen Centriwinkel sind einander gleich, also x = y = t u. s. w. Denn t = Bogen fa, x = Bogen ab, y = Bogen bg. Da nun fa = ab = bg, aus ersterm Beweis, so ist auch t = x = y nach §. 109.

3) Die sämtlichen Polygonwinkel sind einander gleich, also m + r = p + q = s + n, denn fc = ca = bc = gc, wie bewiesen, ferner r = m = p = q = s = n u. s. w., weil es alle gleichschenkligte kongruente Triangel sind, folglich r + m = p + q = s + n.

Da nun r + m = einem Polygonwinkel, so sind auch alle diese Polygonwinkel einander gleich.

§. 114. Aus der Zahl der Seiten eines gegebenen regulären Polygons läßet sich die Größe dessen Centriwinkel leicht bestimmen. Man hat nur nöthig, die Grade eines ganzen Cirkels mit der Zahl der Seiten des gegebenen regulären Polygons zu dividiren, so ist der Quotient = dem ihm eigenen Centriwinkel. Es wäre also z. E. der Centriwinkel eines Fünfecks = $^{360}/_{5}° = 72$ Grad.

Die

Die allgemeine Formel für den Centriwinkel eines jeden regulären Polygons ist, wenn $360 = 4R$, n = der Zahl der Seiten $= \frac{4R}{n}$.

§. 115. Die Größe eines jeden regulären Polygonwinkels ist = der Differenz, welche durch die Subtraction des Centriwinkels von 180 Grad entstehet. Der Polygonwinkel eines regulären Fünfecks ist also $= 180 - \frac{360}{5} = 180 - 72 =$ 108 Grad.

Wenn nun n = der Zahl der Seiten, $180 = 2R$, so wird, da der Centriwinkel nach §. 114 $= \frac{4R}{n}$, die allgemeine Vorstellung eines jeden regulären Polygonwinkels =

$$2R - \frac{4R}{n} = \frac{2Rn - 4R}{n} = \frac{(n-2)}{n} 2R$$

und die Summe aller Polygonwinkel in einem jeden regulären Vieleck würde, weil alle einander gleich, = dem Product, welches durch die Multiplication der Größe eines Polygonwinkels mit der Zahl der Seiten des Polygons entstanden. Da also $\frac{2Rn - 4R}{n}$ = einem jeden Polygonwinkel eines regulären Vielecks, und n = der Zahl der Seiten desselben, so würde

$$\frac{(2Rn - 4R)n}{n} = \frac{2Rn^2 - 4Rn}{n} = 2Rn - 4R =$$

der

der Summe aller Polygonwinkel eines jeden regulären Vielecks.

§. 116. Sowohl in als außer einem Cirkel lässet sich ein reguläres Polygon verfertigen. Ersteres geschiehet entweder mechanisch oder geometrisch. Die mechanische Verfertigung wird auf folgende Art verrichtet.

Man theilet nemlich durch öftere Versuche die gegebene Cirkellinie in so viel gleiche Theile, als das verlangte Polygon Seiten haben soll, ziehet diese Theilungspuncte mit geraden Linien zusammen. Da nun diese Linien = denen Chorden des gegebenen Cirkels und selbige von gleicher Länge, so müssen auch die Bogen, welche einer jeden dieser Chorden eigen, einander gleich seyn, folglich die Polygonwinkel auch von gleicher Größe seyn. Es bestehet also alsdenn die Cirkellinie aus so viel gleichen Theilen, als das verlangte Vieleck Seiten haben soll.

§. 117. Die geometrische Verfertigung eines jeden regulären Polygons in einen Cirkel bestehet in folgenden. Man ziehet in einem gegebenen Cirkel z. E. Fig. 97 einen Diameter ab. Aus dem Centro c setzet man durch Hülfe des Transporteurs den dem verlangten Polygon eigenen Centriwinkel, und ziehet durch solchen und den Centripunct die gerade Linie cd, so ist db = einer Seite des verlangten Vielecks. Fig. 97.

Wenn also der Winkel dcb = 60 Grad, so ist db = der Seite eines regulären Sechsecks, welches auf der Peripherie herumgetragen, denselben

in

in sechs gleiche Theile theilet. Die auf solche Art erhaltene Theile werden mit geraden Linien zusammengezogen, so ist das verlangte Polygon verfertiget.

§. 118. Es lässet sich auch die Länge der Seite eines jeden regulären Polygons durch algebraische Rechnung bestimmen. Diese setzet die Kenntniß der Länge des Radii des gegebenen Cirkels zum voraus. Wir berühren aber hievon hier nur allein, daß die Seite des regulären Sechsecks = Radio des Cirkels, worinnen es verzeichnet Fig. 96. wird. Denn da Fig. 96 der Centriwinkel $t = \frac{360}{6} = 60^\circ$, ferner = r = p, weil die Triangel gleichschenkligt, also beyde 180 — 60 = 120 und daher jeder = 60°, so ist der Triangel afc wie alle andere gleichseitig, also fc = ac = af = Radio. Man trägt also bey Construirung dieses Polygons den Radius sechsmal in der Peripherie herum, welches zutreffen muß. In dem größern Werk, wohin wir unsere Leser verweisen, ist dieses weitläuftiger ausgeführet.

§. 119. Ein jedes reguläres Polygon lässet sich nach §. 95 in kongruente Dreyecke eintheilen. Der Quadratflächeninhalt eines jeden Dreyecks ist, wenn a = der Höhe, b = der Grundfläche = $\frac{ab}{2}$. Es würde also der Flächeninhalt eines jeden regulären Polygons gleich seyn dem Product des Flächeninhalts eines im Polygon vorhandenen Dreyecks mit

mit der Zahl der übrigen kongruenten Dreyecke multipliciret; oder wenn n = der in dem Polygon vorhandenen Dreyecke, so würde $\frac{abn}{2}$ = dem Flächeninhalt des ganzen regulären Polygons. In dem Fig. 96 vorgestelleten regulären Sechseck ist der Flächeninhalt eines Triangels, z. E. ced = $\frac{ch.ed}{2}$ es würde also der Flächeninhalt des ganzen Sechsecks abgdef = $\frac{ch.ed}{2}.6 = 3.ch.ed.$

§. 120. Ein jedes reguläres Polygon kann in andere geradlinigte Figuren von gleichem Inhalt verwandelt werden. Man verwandelt solche aber zuförderst in einen Triangel, und diesen alsdenn in die erforderliche Figur.

Die Verwandlung eines regulären Polygons in einen Triangel ist sehr leicht. Man theilet nur das gegebene Polygon auf die §. 95 gezeigte Art in Triangel, verfertiget hiernächst ein Dreyeck, dessen Grundlinie = der Summe aller Grundlinien, und dessen Höhe = der gemeinschaftlichen Höhe derer in dem Polygon vorhandenen Dreyecke.

Das in Fig. 98 vorgestellte Dreyeck cmo ist also = dem Sechseck Fig. 96. Denn alle in selbigem befindliche Dreyecke sind gleich denen Fig. 98 gezeichneten Dreyecken amb + dbl + elf + gfh + ihk + nko. Fig. 98. Fig. 96.

Da nun ferner Dreyecke von gleicher Grund-

linie und Höhe, auch von gleichem Inhalt, so folget, daß Fig. 98

Triang. cmb = Triang. amb
Triang. cbl = Triang. dbl
Triang. clf = Triang. elf
Triang. cfh = Triang. gfh
Triang. chk = Triang. ihk
Triang. cko = Triang. nko

---

es muß also auch Triang. cmb + cbl + clf + cfh + chk + cko = Triang. amb + dbl + elf + gfh + ihk + nko seyn.

Es ist aber erstere Summe, als Triang. cmb + cbl u. s. w. = Triang. cmo, folglich muß auch letztere Summe, als Triang. amb + dbl u. s. w. = Triang. cmo.

§. 121. Ein jedes reguläres Polygon entstehet, wenn in der Peripherie eines Cirkels von einem Theilungspunct zum andern, welche in gleicher Entfernung sind, Chorden gezogen werden. Diese Chorden sind nun zwar allemal kleiner, als der ihnen zugehörige Bogen. Je mehr Seiten aber ein Vieleck hat, desto kleiner werden zwar Chorden und Bogen, aber desto mehr nimmt auch der Unterschied ihrer Größe ab, und die Chorden nähern sich immer mehr der Größe des ihnen zugehörigen Bogens. In einem Vieleck von unendlich vielen oder sehr vielen Seiten kann man also ohne merklichen Irrthum die Länge der Chorde selbst für die Größe des ihr zugehörigen Bogens annehmen. Wird diese Größe mit der Anzahl der Seiten dieses Polygons multipliciret, so wird das

Pro-

Product fast = der ganzen Peripherie eines Cirkels, in welchem dieses Polygon beschrieben. Die Peripherie eines Cirkels kann also ohne merklichen Fehler in Längenmaaß bestimmt werden.

Ludolph van Ceulen bemühete sich, auf diese Art das Maaß der Peripherie ziemlich genau anzuzeigen. Er berechnete auf ersterwähnte Art das Maaß der Peripherie durch Hülfe eines sowohl in als außer einem Cirkel beschriebenen Polygons von gleich vielen Seiten zu finden. Er erwählte hierauf die mittlere Proportionalzahl zwischen diesen beyden gefundenen Größen für die Länge der Peripherie des Cirkels, und bestimmte durch Näherung, daß, wenn der Diameter eines Cirkels = 1, die Peripherie desselben = 3,1415.... Diese Berechnung setzte er bis auf 32 Decimalstellen fort, welche alle richtig sind.

Nach der Zeit ist auf eben diese Art die Größe der Peripherie bis auf 127 Decimalstellen berechnet. Das Verhältniß des Diameters zu der Peripherie ist also 1:3,1415.... Oder auch, welches mit diesem im Grunde einerley ist, 113:355.

§. 122. Alle Cirkel sind unter einander ähnliche Figuren; es ist also in selbigen auch einerley Verhältniß des Diameters zu der Peripherie. Durch erst gezeigtes Verhältniß mit Beyhülfe der Regula Detri kann also die Peripherie eines Cirkels, dessen Diameter bekannt, in Längenmaaß bestimmet werden.

Gewöhnlich gebraucht man von der angegebe-

nen Größe der Peripherie nur die ersten drey Zahlen, wovon die beyden letzten, wenn der Diameter zu 1 angenommen, Decimalbrüche sind. Wird aber der Diameter zu 100 angenommen, so sind alsdenn alle drey ganze Zahlen.

Wenn also z. E. der Diameter eines Cirkels $= 7$, so ist dessen Peripherie, welche $= x$, nach der ersten Berechnung $= 21{,}98$. Denn

$$1 : 3{,}14 = 7 : x$$

und $3{,}14 \cdot 7 = 1 \cdot x$

also $21{,}98 = x$.

Auch nach der zwoten Berechnung ist diese Peripherie oder $x = 21{,}98$. Denn

$$100 : 314 = 7 : x$$

und $314 \cdot 7 = 100x$

oder $2198 = 100x$

also $x = \frac{2198}{100} = 21\frac{98}{100} = 21{,}98$.

§. 123. Der allgemeine Ausdruck für die Peripherie eines jeden Cirkels, dessen Diameter bekannt, ist d. P.

Hier ist d = der Länge des gegebenen Diameters, und $P = 3{,}14\ldots$ Man kann auch in dieser allgemeinen Formel den Diameter, welcher $= d$, im Werth des Radii bestimmen. Da nun nach §. 21 der Diameter oder $d =$ zween Radiis $= 2r$, so wird auch

$$d.P = 2rP.$$

§. 124. Wenn die Peripherie eines Cirkels bekannt, so lässet sich auch durch erst erwähntes

Ver-

Verhältniß dessen Diameter bestimmen. Denn, wenn wir die Peripherie eines Cirkels p nennen, so wäre nach vorhergehendem Paragrapho $p = d$.

P, also $\frac{P}{P} = d$.

Hier ist p = der gegebenen Peripherie und P = 3,14... und d = dem gesuchten Diameter. Z. E. die Peripherie oder p sey = 27, so ist der Diameter dieses Cirkels oder

$$d = \frac{27}{3,14} = \frac{2700}{314} = 8,59.$$

Eben diese Größe des Diameters erhalten wir durch die Proportionsregel, wenn man nemlich schließet

$$3,14 : 27 = 1 : d$$

$$\text{also } 3,14d = 27 . 1$$

$$d = \frac{27}{3,14} = \frac{2700}{314} = 8,59.$$

§. 125. Wenn der Diameter eines Cirkels bekannt, so kann man auch einen Theil seiner Peripherie, wenn selbiger in Graden und Minuten bestimmt, berechnen. Man sucht alsdenn zuerst die ganze Peripherie. Weil nun selbige aus 360 Graden bestehet, so schließet man, wie sich verhält 360 Grad zu der gegebenen Anzahl Grade des Theils der Peripherie, so verhält sich die gefundene ganze Länge der Peripherie zu der zu findenden. Z. E. der Diameter eines Cirkels sey = 20 Zoll, so ist dessen ganze Peripherie = 6 Fuß $2\frac{4}{5}$ Zoll.

Denn 1 : 3,14 = 20 : x

also $x = 3,14 . 20 = 6280 = 62,80 = 62\frac{80}{100} =$ $62\frac{4}{5}$ Zoll, und die Länge der Peripherie eines Bogens

von diesem Cirkel von 32 Grad wäre $= 5\frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{1}{5}$ Zoll.

Denn $360 : 32 = 62{,}8 : x$

also $x = \frac{32.62{,}8}{360} = \frac{2009{,}6}{360} = 5\frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{1}{5}$.

§. 126. Wenn die Länge der Peripherie eines Cirkels und zugleich von selbigem die Länge eines Bogenstücks bekannt, so lässet sich auch die Anzahl der Grade und Minuten dieses Bogens durch Rechnung bestimmen. Es lässet sich ferner aus der bekannten Länge eines Theils der ganzen Peripherie nebst denen dazu gehörigen Graden sowohl die Peripherie des ganzen Cirkels, als auch der Diameter oder Radius desselben finden.

Wenn also die ganze Peripherie eines Cirkels $= 230$ Fuß, so würde ein Boge dieses Cirkels von 36 Fuß an Graden erfordern

$$\frac{360.36}{230} = \frac{36.36}{23} = \frac{1296}{23} = 56{,}34 \text{ Gr.}$$

Denn 230 Fuß : 36 Fuß $=$ 360 Grad : x Grad,

$$\text{also } x = \frac{36.360}{230} = 56{,}34 \text{ Grad.}$$

Hingegen die Peripherie eines ganzen Cirkels, dessen Bogenstück von 50 Grad $=$ 40 Fuß, wäre

$$\frac{40.360}{50} = \frac{4.360}{5} = \frac{1440}{5} = 288 \text{ Fuß.}$$

Denn 50 Grad : 360 Grad $=$ 40 Fuß : x Fuß

$$\text{also } x = \frac{360.40}{50} = 288 \text{ Fuß,}$$

und der Diameter dieses Cirkels wäre $= \frac{288}{3,14} =$
$\frac{28800}{314} = 91{,}71$ Fuß, also der Radius desselben
$= \frac{28800}{3,14,2} = \frac{28800}{628} = 45{,}855$ Fuß.

§. 127.

§. 127. Der Flächeninhalt eines Cirkels ist = dem Product, welches durch die Multiplication der Peripherie entweder mit der Hälfte des Radii, oder mit dem vierten Theil des Diameters desselben entstehet. Der allgemeine Ausdruck der Peripherie eines jeden Cirkels war nach §. 122 = dP oder auch 2 r . P.

Der Flächeninhalt eines jeden Cirkels wird also auch allgemein seyn entweder $d \cdot P \cdot \frac{d}{4} = \frac{d^2P}{4}$,

oder auch $\frac{2 \cdot r \cdot P \cdot r}{2} = \frac{2r^2P}{2} = r^2P$.

§. 128. Der Beweis der Richtigkeit der Bestimmung eben gezeigten Flächeninhalts eines Cirkels beruhet auf folgenden Betrachtungen.

1) Die Peripherie eines jeden Cirkels ist = einem Polygon von unendlich vielen kleinen Seiten.

2) Es lassen sich auch auf diese kleine Seiten unendlich viele kleine Triangel errichten, deren sämtliche Scheitel im Centro des Cirkels zusammen kommen.

3) Die Grundlinien jeder dieser Triangel sind unendlich klein, auch wird der Unterscheid ihrer Höhe zwischen dem Radio eine unendlich kleine Größe seyn. Man kann also an statt der Basis aller dieser Triangel, wenn man sie in einen Triangel verwandelt, die Peripherie des Cirkels, und an statt der Höhe den Radius selbst nehmen.

4) Die Summa der Basis aller dieser kleinen Triangel mit der Hälfte des Radii, welcher =

dem vierten Theil des Diameters multipliciret, wird also nach §. 120 = dem Flächeninhalt eines Triangels, welcher eben so groß, wie alle die kleinen Triangel. Da nun aber

5) alle diese kleinen Triangel = dem ganzen Cirkel sind, so ist auch der Flächeninhalt des großen Triangels = dem Flächeninhalt des Cirkels.

Wenn also z. E. der Diameter eines Cirkels = 8 Zoll, so ist der Flächeninhalt desselben nach der ersten Formel §. 127.

$$\frac{d^2P}{4} = \frac{8^2.3,14}{4} = \frac{64.3,14}{4} = 16.3,14 = 50,24$$

Zoll = 50″24‴ Quadratmaaße.

Nach der zwoten Formel $r^2P = (\frac{8}{2})^2.3,14$

$$= \frac{64.3,14}{4} = 16.3,14 = 50''24'''$$ Quadratmaaße.

§. 129. Aus dem gegebenen Flächeninhalt eines Cirkels lässet sich sowohl dessen Peripherie als Diameter und Radius bestimmen. Wenn also z. E. der Flächeninhalt eines Cirkels allgemein genommen = a, und das Verhältniß des Diameters zu der Peripherie 1 : P, in welcher P = 3,14, so wird, weil nach §. 127 $a = r^2P$ und $\frac{a}{P} = r^2$,

also $\sqrt{\frac{a}{P}} = r$ = Radio eines Cirkels, dessen Flächeninhalt = a.

Fer-

Ferner, weil auch nach §. 127 $a = \frac{d^2P}{4}$ und $4a =$ d^2P, ferner $\frac{4a}{P} = d^2$,

also $\sqrt{\frac{4a}{P}} = d =$ Diameter eines Cirkels, dessen Flächeninhalt $= a$.

Wäre also z. E. der Flächeninhalt eines Cirkels $=$ $a = 5\overset{\circ}{}24'''$ Quadratmaaß, so wird nach ersterer Formel der Radius dieses Cirkels $= r = \sqrt{\frac{a}{P}} =$ $\sqrt{\frac{5\overset{\circ}{}24'''}{3,14}} = \sqrt{16''} = 4''$.

Und nach der zwoten Formel würde der Diameter dieses Cirkels $= d = \sqrt{\frac{4a}{P}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 5\overset{\circ}{}24'''}{3,14}}$ $= \sqrt{\frac{200,96}{3,14}} = \sqrt{64''} = 8''$.

§. 130. Wenn die Summe oder auch die Differenz des Flächeninhalts verschiedener Cirkel bekannt, so lässet sich der Radius eines Cirkels finden, welcher entweder eben so groß als die gegebene, oder auch dessen Inhalt $=$ der Differenz des Inhalts der gegebenen. Die Bestimmung dieses Radii geschiehet entweder durch Beyhülfe erst gezeigter Formel r^2P, oder geometrisch.

Nach ersterer Formel würde also, wenn der Flächeninhalt des einen Cirkels $= A$, dessen Ra-

dius = R; der Flächeninhalt des andern Cirkels = a, dessen Radius = r, der Radius eines Cir. kels, welcher am Inhalt denen beyden Cirkeln A + a gleich, folgender seyn $\sqrt{\frac{A+a}{P}}$. Denn

$$A = R^2P \quad \text{und}$$
$$a = r^2P$$

$$\text{also } A+a = R^2P+r^2P$$

$$\text{oder } A+a = (R^2+r^2)P$$

$$\text{also } \frac{A+a}{P} = R^2+r^2$$

$$\text{folglich } \sqrt{\frac{A+a}{P}} = \sqrt{(R^2+r^2)}$$

Hingegen der Radius eines Cirkels, welcher = der Differenz des Inhalts zweener gegebener Cirkel, welche = A − a, wäre $\sqrt{\frac{A-a}{P}}$. Der Beweis ist ersterm gleich.

Wenn also A = 5○″24‴ und a = 12″56‴, so wäre der Radius eines Cirkels, welcher = A + a,

$$= \sqrt{\frac{A+a}{P}} = \sqrt{\frac{5^{\circ\prime\prime}24^{\prime\prime\prime}+12^{\prime\prime}56^{\prime\prime\prime}}{3,14}} = \sqrt{\frac{62,80}{3,14}}$$

$$= \sqrt{20} = \sqrt{4.5} = 2\sqrt{5} = 2.2,2360.. =$$

4,4720, und der Radius eines Cirkels, welcher A − a, wäre $= \sqrt{\frac{A-a}{P}} = \sqrt{\frac{5^{\circ\prime\prime}24^{\prime\prime\prime}-12^{\prime\prime}56^{\prime\prime\prime}}{3,14}} =$

$$\sqrt{\frac{37,68}{3,14}} = \sqrt{12} = \sqrt{4.3} = 2\sqrt{3} = 2.17320$$

$= 3''$,4640.

De

Da nun nach §. 128 der Flächeninhalt eines Cirkels, dessen Radius bekannt ist, war r^2P, so muste auch hier der Flächeninhalt des Cirkels A+a 4,4720.4,4720.3,14 = 62,80, und der Flächeninhalt des Cirkels A—a wieder seyn 3,4640. 3,4640.3,14 = 37,68, welches aber nicht in allen Zahlen zutrift, denn es ist

4,4720.4,4720.3,14 = 62,796181760o

und 3,4640.3,4640.3,14 = 37,67778944oo.

Dieses rühret aber daher, weil sowohl die Zahl 5 als 3 eine Irrationalgröße, deren Wurzel also nicht genau, sondern allein durch Näherung zu bestimmen.

§. 131. Will man aber geometrisch den Radium eines Cirkels finden, welcher entweder $= \sqrt{\frac{A+a}{P}}$ oder $= \sqrt{\frac{A-a}{P}}$, so verrichtet man selbiges durch das pythagorische Theorem auf folgende Art.

Man setzet nemlich die Radii beyder Cirkel, z. E. Fig. 99 von denen Cirkeln A und B die Radii ac und ab unter einem rechten Winkel an einander, so giebt die Hypothenuse bc des Triang. E Fig. 99 die Länge des Radii des Cirkels C, welcher eben so groß, wie die Summe beyder gegebener Cirkel A und B. Fig. 99.

Setzet man hingegen auf eine gerade Linie von unbestimmter Länge, z. E. bd Fig. 100 den Radium ab des kleinern gegebenen Cirkels A unter einen rechten Winkel, und ziehet von dem Endpunct derselben, oder a auf die Basin bd die Hy- Fig. 100.

pothenuse ac von der Länge des Radii bc, welcher dem gegebenen größern Cirkel C eigen, so ist die Basis ac des Triang. abc = dem Radio des Cirkels D, welcher = der Differenz des Inhalts beyder gegebener Cirkel A und C.

§. 132. Alle Cirkel stehen mit einander sowohl in Ansehung ihrer Peripherie, als Flächeninhalts in einem geometrischen Verhältniß. Man kann also auf beyde Arten zween gegebene Cirkel von verschiedener Größe mit einander vergleichen und ihr Verhältniß bestimmen.

§. 133. Das Verhältniß zweener Cirkel in Ansehung ihrer Peripherie ist = dem Verhältniß ihrer Diameter oder auch ihrer Radiorum.

Denn wenn die Peripherie des einen Cirkels = p, und dessen Radius = r, die Peripherie des andern Cirkels = π, und dessen Radius = ϱ, und p = 3,14, so folget, daß

$$p : \pi = 2rP : 2\varrho P$$

ferner $$p : \pi = \frac{2rP}{2P} : \frac{2\varrho P}{2P}$$

also $$p : \pi = r : \varrho.$$

§. 134. Das Verhältniß zweener Cirkel in Ansehung ihres Flächeninhalts ist = dem Verhältniß der Quadrate ihrer Diameter oder Radiorum. Denn, weil der Flächeninhalt eines Cirkels, z. E. A, dessen Diameter = D, gleich ist $\frac{D^2P}{4}$, und der Flächeninhalt eines Cirkels, z. E. a, dessen Dia-

Diameter = d, gleich ist $\frac{d^2P}{4}$ §. 129; so folget, daß

$$\text{Cirkel A} : \text{Cirkel a} = \frac{D^2P}{4} : \frac{d^2P}{4}$$

oder $$\text{Cirkel A} : \text{Cirkel a} = \frac{D^2P}{4} \cdot \frac{4}{P} : \frac{d^2P}{4} \cdot \frac{4}{P}$$

also Cirkel A : Cirkel a = $D^2 : d^2$.

Da auch nach §. 129, wenn R = dem Radio des Cirkels A und r = dem Radio des Cirkels a, folget, daß $\frac{D^2P}{4} = R^2P$ und $\frac{d^2P}{4} = r^2P$, so muß auch der Flächeninhalt ersterwähnten Cirkels A zu dem Flächeninhalt des Cirkels a sich verhalten wie $R^2 : r^2$,

Denn Cirkel A : Cirkel a = $R^2P : r^2P$

und $$\text{Cirkel A} : \text{Cirkel a} = \frac{R^2P}{P} : \frac{r^2P}{P}$$

also Cirkel A : Cirkel a = $R^2 : r^2$.

§. 135. Wenn das Quadrat des Diameters eines Cirkels = 1000, so ist dessen Flächeninhalt beynahe = 785.

Durch Hülfe dieses gefundenen Verhältnisses 1000 : 785 kann man den Flächeninhalt eines jeden Cirkels, dessen Diameter bekannt, finden.

Ist also z. E. der Diameter eines Cirkels = 8″, so ist dessen Flächeninhalt = 50″24‴ = 50 Zoll 24 Linien, Quadr. Maaße, denn

1000

$$1000 : 785 = 8^2 : x$$

$$1000 : 785 = 64 : x$$

$$1000 . x = 785 . 64$$

$$x = \frac{785.64}{1000} = \frac{50240}{1000} = 50'',24'''.$$

§. 136. Alle Centriwinkel in Cirkeln von gleichen Radiis verhalten sich in Ansehung ihrer Größe, wie die Bogen, durch welche sie gemessen werden. Da also die Radii ca und cb Fig. 83 und 84 einander gleich, so ist das Verhältniß der beyden Centriwinkel in Ansehung ihrer Größe oder Centriwinkel acd : Centriwinkel bcf = Bogen ad : Bogen bf.

Fig. 83. 84.

Sind hingegen die Radii verschieden in der Größe, so ist das Verhältniß dieser Centriwinkel in Ansehung ihrer Größe = dem Product der Länge ihrer Bogen mit verwechselten Radiis multipliciret. Weil nun die Radii ac und ab Fig. 99 A und B von verschiedener Größe, so ist

Fig. 99.

Centriwinkel dac : Centriwinkel cab = dc . ab : cb . ac.

Der Beweis von beyden angeführten Formeln ist in dem größern Werk, wovon dieses ein Auszug, weitläuftiger ausgeführet.

§. 137. Ein auf dem Diameter eines Cirkels von der Peripherie desselben gefälleter Perpendikel ist allemal die mittlere Proportionallinie zwischen beyden Abschnitten des Diameters, welche der Perpendikel macht. Da nun Fig. 101 der Diameter = ab, und der Perpendikel = de, so folget, daß ae : ed = ed : eb

Fig. 100.

Die-

Dieses zu beweisen, ziehe man die Hülfslinien ad und db, so erhält man drey Triangel adb, ade, edb, von welchen

Triang. adb ≅ Triang. ade.

Denn der Winkel adb = Recto, weil es ein auf dem Diameter stehender Peripheriewinkel; ferner ist Winkel dea = Recto, weil de = Perpendikel, ferner der Winkel x ist beyden gemein, es muß also auch x = y seyn.

Es ist aber auch Triang. edb ≅ Triang. adb. denn der Winkel adb = Recto, und der Winkel deb = Recto, beydes aus ersterm angeführten Grunde. Da nun auch beyden der Winkel y gemein ist, so ist auch der Winkel n = dem Winkel x.

Da nun der Triang. adb ∽ Triang. ade
und auch der Triang. adb ∽ Triang. edb

---

so ist Triang. ade ∽ Triang. edb.

Da auch der Winkel n = dem Winkel x, also auch der Winkel z = dem Winkel y; so folget, daß ae : ed = ed : eb, folglich auch ed . ed = ae . eb.

§. 138. Die Seite eines Quadrats, welches eben so groß, als ein gegebenes Rectangel, ist die mittlere Proportionalgröße zwischen der Höhe und Basis des Rectangels.

Wenn also ein Rectangel in ein Quadrat von gleichem Inhalt verwandelt werden soll, so kann man die Seite dieses Quadrats sowohl durch Rechnung als geometrisch finden. Bey ersterer muß die Länge der Grundlinie und Höhe des Rectangels in Längenmaaß bekannt seyn. Wenn also a = der

Höhe

Höhe und b = der Grundlinie des Rectangels, so wird x oder die Seite eines gleich großen Quadrats $= \sqrt{ab}$.

Denn $a : x = x : b$

also $ab = x^2$

folglich $\sqrt{ab} = \sqrt{x^2} = x$.

Es ist also die Quadratwurzel aus dem Product der Grundlinie mit der Höhe eines Rectangels = der Seite eines Quadrats, welches dem gegebenen Rectangel am Flächeninhalt völlig gleich.

Geometrisch wird die Seite dieses Quadrats auf folgende Art gefunden.

Fig. 102. Man ziehet z. E. Fig. 102 eine gerade Linie ab, welche so lang als die Grundlinie ae und Höhe eb des gegebenen Rectangels B. Man theilet ferner diese Länge ab in zween gleiche Theile in c, und ziehet aus diesem Punct c mit der Weite ca einen halben Cirkel auf ab, setzet auf ab von a nach b die Länge der Grundlinie ae des gegebenen Rectangels B, und aus diesem Endpunct e auf ab den Perpendikel de, so ist de = der Seite des Quadrats A, welches an Flächeninhalt eben so groß wie das Rectangel B.

Der Beweis beruhet auf der am Ende des §. 137 gefundenen Proportion, denn weil nach selbiger

$ae : ed = ed : eb$, so folget

daß $ae . eb = ed : ed$

oder $ae . eb = edq$

also $\sqrt{ae . eb} = \sqrt{edq} = ed$.

§. 139.

§. 139. Die Stücke oder Segmenta der Schenkel, z. E. Fig. 103 ad und ac eines außer der Peripherie eines Cirkels befindlichen Winkels cab verhalten sich umgekehrt, wie die ganzen Schenkel ac und ab dieses Winkels.

Denn, wenn man in einem solchen Winkel, z. E. Fig. 103 die Endpuncte b und c und die Durchschnittspuncte e und d mit Chorden be und ed verbindet, so entstehen zween einander ähnliche Triangel bac und ead. Denn Fig. 103.

1) sind die Winkel $z + x = 2R$, weil sie Nebenwinkel sind, §. 30

2) Sind die Winkel $y + x = 2R$, weil sie einander entgegen gesetzet. §. 111

Folglich der Winkel $z =$ dem Winkel y.

Da nun ferner der Winkel bey a beyden Triangeln gemeinschaftlich ist, so ist

3) der Winkel $n = m$.

Es sind aber die gleichen Winkel entgegengesetzte Seiten nach §. 92 einander proportional, folglich verhält sich

$$ad : ab = ae : ac$$

und $$ad : ae = ab : ac$$

§. 140. Wenn Fig. 104, 105 und 106 in einem außer der Peripherie befindlichen Winkel der eine Schenkel desselben die Peripherie nur berühret, so wird diese Tangente allemal die mittlere Proportionalgröße zwischen beyde Segmente des andern Schenkels, welcher die Peripherie schneidet. Wir bemerken hiebey folgende drey Fälle.

Der erste Fall.

Fig. 104. Der Schenkel ha des Winkels bha Fig. 104 gehet, indem er den Cirkel schneidet, nicht durch das Centrum desselben. Seine Lage ist aber so beschaffen, daß, wenn man die Endpuncte beyder Schenkel des Winkels bha durch die gerade Linie ab verbindet, diese ab durch das Centrum c gehet.

Es stehet also der Winkel bha mit dem Schenkel hb auf dem Ende der Linie ab, welche = Diameter, und mit dem andern Schenkel ha berührt er selbige. Hier verhält sich

hd : hb = hb : ha.

Beweis.

Durch die in Fig. 104 gezogene Hülfslinien ba und bd entstehen zween Triangel abh und hbd, welche einander ähnlich sind; es ist also

Triang. abh ∽ Triang. hbd.

Denn die Winkel x + y = R, weil die Tangente hb auf dem Diameter stehet, §. 106

Ferner der Winkel r = Recto, weil es ein auf dem Diameter stehender Peripheriewinkel, §. 110

Desgleichen der Winkel s = Recto, weil es ein Nebenwinkel eines Recti, §. 30.

Der Winkel bha ist beyden Triangeln gemein.

Weil nun in ähnlichen Triangeln die gleichen Winkeln entgegen gesetzte Seiten nach §. 92 einander proportional sind, so folget, daß

hd : hb = hb : ha.

Der zweyte Fall.

Fig. 105. Der Schenkel ha des Winkels bha Fig. 105 gehet, indem er den Cirkel schneidet, durch dessen Cen-

Centrum c. Werden hier die Endpuncte beyder Schenkel des Winkels bha durch die gerade Linie ab verbunden, so wird ab = Chorde §. 20. Auch hier verhält sich

hd : hb = hb : ha.

Beweis.

Die, durch die in Fig. 105 gezogene Hülfslinien ab, bc, bd entstandene Triangel abh und hbd sind einander ähnlich; also

Triang. abh ∽ Triang. hbd.

Denn der Winkel x + y = Recto, weil es ein auf dem Diameter stehender Peripheriewinkel §. 110. Und die Winkel x + m = Recto, weil die Tangente hb auf dem Radio bc stehet §. 106. Es ist also auch der Winkel x + y = dem Winkel x + m, und der Winkel y = dem Winkel m.

Der Triang bca ist gleichschenkligt, weil in selbigem bc = ca = Radio, folglich ist in selbigem der Winkel y = dem Winkel z §. 41.

Da nun der Winkel m = dem Winkel y, so muß auch der Winkel m = dem Winkel z seyn. Es ist ferner der Winkel ahb beyden Triangeln gemein, mithin ist nach §. 92 der Winkel m + x + y = dem Winkel s. Es folget also auch nach §. 92, daß

hd : hb = hb : ha

Der dritte Fall.

Der Schenkel ha des Winkels bha Fig. 106 gehet wieder, indem er den Cirkel schneidet, nicht durch das Centrum desselben. Vereinigen wir hier wieder die Endpuncte beyder Schenkel des Winkels Fig. 106.

bha durch eine gerade Linie ab, so wird diese ab gleichfalls nach §. 20 = einer Chorde. Auch hier ist die Tangente hb die mittlere Proportionallinie zwischen die Segmente hd und da des andern Schenkels ha, oder

hd:hb = hb:ha.

Beweis.

Man ziehe die Hülfslinie hg Fig. 106, welche durch das Centrum c des Cirkels gehet, so ist aus dem vorhergehenden Fall folgendes richtig; daß

he:hb = hb:hg.

Nun ist ferner nach §. 139

hd:he = hg:ha

da also nun he:hb = hb:hg

und hd:he = hg:ha, so folget, daß

hd:hb = hb:ha

folglich auch hd.ha = hbq,

oder das Quadrat der Tangente hb ist gleich dem Producte der Segmente hd, ha des den Cirkel schneidenden Schenkels ha.

§. 141. Zwo in einem Cirkel gezogene Chorden mögen sich auf alle mögliche Art schneiden; die dadurch entstehende Segmente oder abgeschnittene Stücke sind einander wechselsweise proportional, und die Producte der Segmente sind gleich.

Es verhält sich also Fig. 107 Fig. 107.

ag:ge = dg:gb.

Der Winkel x = y, weil es Verticalwinkel, §. 33.

Der Winkel r = m, weil man beyde als Peripheriewinkel betrachten kann, die beyde auf einem Segment ae stehen.

Da

Da nun auch der Winkel n = dem Winkel s, so ist Triang. egb ∽ Triang. agd. Es verhält sich also in selbigem

ag : ge = dg : gb

oder ag : dg = ge : gb

es ist also ag . gb = dg . ge.

Das achte Kapitel.

Von der Lage der Linien gegen eine Ebene, und der Ebenen gegen einander.

§. 142. Eine Ebene ist eine Fläche, in welcher alle gerade Linien, die von einem Umfangspunct derselben zum andern gezogen werden, mit allen ihren Puncten zu liegen kommen. Wirkliche Ebenen giebt es in der Natur nicht, denn es sind selbige allemal Oberflächen gewisser Körper. Wir stellen uns aber unkörperliche Ebenen, und zwar ohne Grenzen vor. Die Vorstellung einer Ebene ist dahero schwer. Die bequemste Figur zur Abbildung einer Ebene ist ein Viereck. An einander gelegte Kartenblätter, und die, durch auf selbige gesteckte große Nadeln und an selbige bevestigte Faden, vorgestellte Linien, deren Betrachtung wir uns unterziehen müssen, werden unsrer Einbildungskraft zur sinnlichen Vorstellung derselben am besten zu Hülfe kommen. Die Lage der Ebenen ist sehr verschieden.

§. 143. Durch jede gerade Linie lässet sich eine Ebene legen. Hiedurch aber wird ihre Lage nicht bestimmt, z. E. der Falz eines zusammengebogenen Kartenblats ist eine gerade Linie, in diese kann ein anderes Kartenblat, welches eine Ebene vorstellet, in verschiedener Stellung gelegt werden. Da man nun in einer geraden Linie zween Puncte annehmen kann, so bestimmen zween Puncte noch nicht die Lage der Ebene; aber ein außer einer geraden Linie gegebener dritter Punct bestimmt die Lage einer Ebene, denn eine durch diese gerade Linie gelegte Ebene wird endlich diesen gegebenen Punct berühren.

§. 144. Durch drey gegebene Puncte lässet sich nur eine Ebene legen. Alle Figuren, welche also durch drey Puncte bestimmet werden, z. E. alle Dreyecke, ebene geradlinigte Winkel, Cirkel u. s. w. liegen in einer Ebene.

§. 145. Sind mehr als drey Puncte gegeben, welche nicht in gerader Linie liegen, so können selbige sämtlich in einer Ebene sich befinden; liegen sie aber nicht in einer Ebene, so wird ihre Lage nur verstatten, durch drey oder einige derselben eine und eben dieselbige Ebene zu legen.

§. 146. Verschiedene durch eine gerade Linie gelegte und unterwärts verlängerte Ebenen schneiden sich nur in einer und zwar geraden Linie. In dieser Durchschnittslinie ist auch der einzige Punct, welchen sie mit einander gemein haben.

§. 147. Die Stellung einer geraden Linie auf einer Ebene ist entweder, wie Fig. 108 ac auf

degf

degf senkrecht, oder nach der einen Seite mehr als nach der andern geneiget. Diese Neigung einer geraden Linie gegen ihre Ebene wird ihr Winkel genennet.

Die Bestimmung dieses Winkels geschiehet auf folgende Art. Von dem Endpunct a oder andern willkührlichen Punct der geraden Linie ab Fig. 108 fället man auf die Ebene defg den Perpendikel ac, ziehet die Puncte, wo beyde Linien die Ebene berühren, also b und c mit der geraden Linie bc zusammen, so ist abc = dem Winkel, welchen die Linie ab gegen ihre Fläche defg macht. Fig. 108.

§. 148. Auf eine jede Ebene kann man eine gerade Linie senkrecht stellen. Sie stehet alsdenn senkrecht, wenn sie mit allen durch den Punct, wo sie die Ebene berühret, gezogene Linien rechte Winkel macht.

Wir beweisen hier nun den wichtigen Lehrsatz, daß Fig. 109 eine gerade Linie ab auf einer ganzen Ebene fegd senkrecht stehe, wenn sie auf den Durchschnittspunct zwoer andern in dieser Ebene sich befindenden geraden Linien, z. E. bg und bd, senkrecht stehet. Fig. 109.

Man ziehe ganz willkührlich zu bg und bd durch den Durchschnittspunct b die dritte gerade Linie hc, in welcher Lage man wolle, man wird allezeit beweisen können, daß sie darauf senkrecht stehe.

Beweis.

Man mache bf = bd, ferner be = bg und ziehe ed und fg, so ist

1) Triang. ebd ≅ Triang. fbg, weil bey b Verticalwinkel, die gleich sind.

2) Triang fbh ≅ Triang dbc, weil bf = bd, die Winkel bey b verticalen, und aus dem vorhergehenden bekannt, daß der Winkel bdc = Winkel bfh.

3) Triang. abg ≅ Triang. abe, denn bey b ist ein rechter Winkel, ferne be = bg und ab ist sich selber gleich.

4) Triang. abf ≅ Triang. abd, denn bey b ist ein rechter Winkel und bd = bf, ferner ab sich selber gleich. Hieraus folget,

5) daß der Triang. afg ≅ Triang. ade, weil aus dem vorhergehenden erhellet,

daß nach 1. fg = fd
nach 3. ag = ae
nach 4. af = ad

also ist auch nun der stehende Winkel afh = dem Winkel adc. Hieraus folget,

6) der Triang. afh ≅ Triang. adc, weil
nach 2. fh = dc
nach 4. af = ad
nach 5. W. afh = Wink. adc. Es ist also

7) der Triang. abh ≅ Triang. abc, weil hb = bc nach 2, ah = ac nach 6, und ab sich selber gleich, folglich der Winkel abc = dem Winkel abh, und da es Nebenwinkel, sind also beyde rechte Winkel. Nun war hc in einer willkührlichen Lage gezogen, da der Beweis dahero allgemein wird, so folget das, was wir im Anfange des Beweises behauptet haben, nemlich eine jede auf einer Ebene

aufgerichtete Linie, welche auf zwo andern in eben der Ebene liegenden Linien perpendikular stehet, ist ein auf der Ebene aufgerichteter Perpendikel.

Weniger aber als zwo Linien können solches nicht beweisen. Denn wäre z. E. ab allein auf bg Perpendikel, mithin der Winkel abg = Recto, so bliebe dieser Winkel auch ohngeändert, wenn gleich die Richtung ab nach einer Seite mehr als nach der andern geneigt wäre. Durch Hülfe eines auf einer Ebene gesteckten geraden Draths wird man solches deutlich einsehen.

Ein gemeiner Winkelhaake, an dessen einem Schenkel unter einem willkührlichen, obgleich etwas großen Winkel noch ein Schenkel angesetzet, ist also das bequemste Werkzeug, die Perpendikularität eines eingeschlagenen Stifts zu prüfen.

§. 149. Auf einem Punct in einer Ebene lässet sich nur ein Perpendikel ziehen, und dieser ist allemal die kürzeste Linie. Ersteres beweiset, weil ein Perpendikel = Recto, und in jedem geradlinigten Triangel nach §. 56 nur ein rechter Winkel möglich. Letzteres beweiset, weil alle übrige von dem Endpunct des Perpendikels nach der Ebene gezogene Linien = der Hypothenuse eines rechtwinklichten Triangels, und diese allezeit größer als eine jede übrige Linie desselben.

§. 150. Zwo auf einer Ebene aufgerichtete **Parallelen** sind **Perpendikularen**, wenn nur von einer derselben die Perpendikularität bewiesen; ferner zwo auf einer Ebene aufgerichtete Perpendikularen sind einander parallel. Wenn also vestge-

Fig. 110. setzet, daß Fig. 110 auf der Ebene lmno die Linie ab = Perpendikel und ab ⫫ ed, so folget, daß auch cd = Perpendikel auf eben erwähnter Ebene.

Der Beweis beruhet auf der Gewißheit, daß cd auf zwo in der Ebene gezogenen Linien, z. E. auf db und de perpendikular stehet. In dem größern Werk ist dieser Beweis weitläuftig ausgeführet.

§. 151. Aus allen bisher angestellten Betrachtungen folget die geometrische Auflösung der Aufgabe, entweder aus einem außer einer Ebene gegebenen Punct auf diese Ebene einen Perpendikel zu fällen, oder auch auf einem in einer Ebene gegebenen Punct eine Perpendikulare aufzurichten.

§. 152. Auf einem außer einer Ebene gegebenen Punct auf die Ebene eine Perpendikulare zu fällen, geschiehet auf folgende Art.

Man ziehet in der gegebenen Ebene, z. E. Fig. 111. Fig. 111 lmno die gerade Linie de in willkührlicher Lage. Auf selbige setzet man senkrecht aus dem gegebenen Punkt a die Linie ac, so, daß der Winkel acd = dem Winkel ace = Recto, ferner aus c als dem Endpunct der ac gleichfalls senkrecht, die Linie ch von unbestimmter Länge. Auf ch fälle man aus dem außer der Ebene gegebenen Punct a die Perpendikulare ab, so muß ab = Perpendikel der ganzen Ebene lmno seyn, weil ab die Perpendikulare zwoer Linien bc und bf, wie aus dem in dem größern Werk geführten Beweis deutlich zu sehen.

§. 153.

§. 153. Auf einem in einer Ebene gegebenen Punct p. Fig. 111 eine Perpendikulare aufzurichten, geschiehet also. Fig. III.

Man erwählet außer der gegebenen Ebene lmno willkührlich einen Punct, z. E. a, und fället aus diesem die Perpendikulare ab, ziehet mit selbiger die Parallele pq aus dem gegebenen Punct p, so ist pq = dem verlangten Perpendikel.

§. 154. Zwo gerade Linien, welche mit einer dritten parallel sind, sind auch unter einander parallel, wenn sie gleich nicht alle drey in einer Ebene liegen. Da also Fig. 110. ab ∥ cd ∥ ge, so ist Fig. 110. sowohl ab ∥ ge als auch ab ∥ cd und ge ∥ cd.

§. 155. Der Endpunct eines auf einer Ebene aufgerichteten Perpendikels ist gleich weit von jedem Punct in der Peripherie eines Cirkels entfernet, dessen Centrum der Berührungspunct des Perpendikels ist. Da also Fig. 112 der Punct c in der Ebene lmno das Centrum des in selbiger befindlichen Cirkels, so ist ab = ad, denn Fig. 112.

bc = cd = Radio
ac = ac = Perpend.
der Winkel acb = dem Winkel acd = Recto

folglich Triang. acb ≅ Triang. acd.

§. 156. Eine mit einer Ebene gezogene Parallele erreicht selbige nie, wenn gleich die Ebene noch so sehr vergrößert wird.

Die Stelle und Richtung einer mit einer Ebene zu ziehenden Parallele zu bestimmen, muß in der Ebene eine gerade Linie, welche ∥ der gegen ihr über stehenden Seite der Ebene, und außer der

Ebene

Ebene der Punct gegeben seyn, aus welchem mit ersterer Linie die verlangte Parallele zu ziehen. Z. E. in Fig. 113 in der Ebene lmno sey cd die gegebene Linie, welche ∥ lm, zu welcher aus dem Punct a, welcher außer der Ebene, die verlangte Parallele ab zu ziehen. Da nun

Fig. 113.

cd ∥ lm
cd ∥ ab } ex Constructione

so ist auch lm ∥ ab, weil nach §. 53 Parallelen zwischen Parallelen einander gleich, und die Linie ab erreicht oder berührt die Ebene ln nie.

§. 157. Zween Winkel z. E. Fig. 114 ABC und abc, wovon ersterer in der Ebene lmno und letzterer außer selbiger liegt, sind einander gleich, wenn erweislich, daß beyder über einander stehende Schenkel parallel, also AB ∥ ab, BC ∥ bc.

Fig. 114.

Beweis.

Man mache in eben erwähnter Ebene lmno. AB = ab, BC = bc, und ziehe die Hülfslinien AC, ac, Aa, Cc, weil nun CB ∥ und = bc auch AB ∥ und = ab, so ist Aa und Cc und Bb nach §. 53 parallel, also muß auch ac ∥ und = AC seyn, also der Triangel abc ≅ Triangel ABC, folglich der Winkel ABC = dem Winkel abc.

§. 158. Zwo einander schneidende Ebenen machen einen Winkel, welcher der Flächenwinkel genennet wird.

Die Bestimmung dieses Winkels geschiehet auf folgende Art.

Fig. 115.

In der geraden Linie BD Fig. 115, in welcher

cher sich die gegebene Ebene AGCH und EBDF schneiden, erwählet man willkührlich einen Punct, z. E. l, und ziehet auf selbigen sowohl in der Ebene EBDF die senkrechte Linie lg, daß also glB = Recto, als auch in der Ebene ACGH die senkrechte Linie nl, so ist der Winkel nlg der Flächenwinkel beyder Ebenen gegen einander. Stehet alsdenn gl auf ln perpendikular, so ist gln = Recto; ist aber gl nach n geneiget, wie hier, so ist gln = einem spitzen und glh = einem stumpfen Winkel.

Die Bezeichnung eines Flächenwinkels, z. E. des Winkels gln Fig. 115 geschiehet hier durch die vier Buchstaben EBDH, wovon die beyden mittelsten allemal an der Durchschnittslinie, wie hier an BD, die übrigen beyden aber von denen gegen einander stehenden Ecken der sich schneidenden Ecken genommen werden.

Dieses eben bestimmte Maaß eines Flächenwinkels ist das bequemste, weil alle aus jedem Punct aus obgedachter geraden Linie BD auf erstere Art gezogene Linien einander parallel, folglich auch die durch diese Schenkel entstehende Winkel von gleicher Größe.

§. 159. In zwo Ebenen, die auf einander perpendikular stehen, wie z. E. Fig. 116 efgh auf abcd, ist Fig. 116.

1) der Flächenwinkel ehag oder l. o. m = Recto.

2) Wird l, o nicht nur auf die Schneidungslinie gh beyder Ebenen, sondern auch auf der ganzen Ebene abcd senkrecht stehen.

Er-

Ersteres beweiset §. 158, und letzteres gründet sich auf §. 148. Denn l. o stehet sowohl auf gh als mo senkrecht, es muß also auch lo = dem Perpendikel der ganzen Ebene abcd seyn. Wenn nun

3) vest gesetzet, daß efgh auf abcd senkrecht stehet, so wird allemal lom = Recto, es mag übrigens die Wendung der Fläche efgh beschaffen seyn, wie sie wolle.

§. 160. Wenn zwo oder mehrere sich schnei-
Fig. 117. dende Ebenen, z. E. Fig. 117 ghik und decf auf einer Ebene lmno senkrecht stehen, so muß auch die Durchschnittslinie ab beyder perpendikular stehenden Ebenen auf letzterer Ebene senkrecht stehen. Man sehe den Beweis hievon in dem größern Werke.

Die sinnlichste Ueberzeugung hievon giebt folgendes Gleichniß. Z. E. die Wände eines Zimmers stehen auf dem Boden desselben senkrecht, es stehen also auch die Linien der sich in denen Ecken des Zimmers schneidenden Wände auf dem Boden senkrecht.

§. 161. Alle Ebenen von gleichen Flächenwinkeln passen in einander, oder können ganz in einander gelegt werden.

§. 162. Wenn die Lage zwoer Ebenen, z.
Fig. 118. E. Fig. 118 efgh und abcd gegen einander parallel, so muß die gerade Linie mn, welche auf abcd senkrecht stehet, auch auf efgh perpendikular seyn, weil die Neigung mn gegen beyde Flächen = Recto.

Hier-

Hieraus folget,

1) wenn zwo Ebenen der dritten parallel, so sind erstere auch einander parallel.

2) In zwo parallelen Ebenen, z. E. Fig. 118 efgh und abcd, welche durch eine dritte opqr, es sey in welcher Lage, durchschnitten wird, sind diese Durchschnittslinien auch einander parallel, also ist op ∥ qr.

3) Zwo parallele Linien, welche zwischen zwo parallele Flächen gezogen, sind einander gleich, also Fig. 118 oq = pr.

4) Zwo parallele Ebenen werden durch eine dritte unter gleichem Flächenwinkel auf einer und eben der Seite der Ebene geschnitten, es sind also die Neigungswinkel der schneidenden Ebene gegen die beyden Parallelen gleich.

§. 163. Drey parallele Ebenen, z. E. Fig 119 abcd, efgh, iklm schneiden zwo gerade Linien ns, ot in proportionale Theile. Fig. 119.

Man ziehe die Endpuncte beyder geraden Linien ns und ot durch die gerade Linien no und st zusammen, ferner ziehe man die Diagonale os, so entstehen die kongruenten Triang. nos und sot, wovon ersterer durch die mittelste Ebene in pq, und letzterer in st und qr von beyden untersten Ebenen zerschnitten wird. Diese sämtlichen Schnitte sind ∥. Denn da

abcd ∥ efgh, so muß auch nach §. 162 no ∥ pq seyn. Man kann also schließen

np : ps = oq : qs

und or : rt = oq : qs

also np : ps = or : rt.

Das

Das neunte Kapitel.

Allgemeine Betrachtungen über die Körper und ihre Oberflächen.

§. 164. Körper sind Größen, welche in der Länge, Breite und Tiefe ausgedehnet sind.

Alle Körper sind entweder in ebenen oder krummen Oberflächen, welche nach §. 3 ihre Grenzen, eingeschlossen.

Zu jedem Körper werden wenigstens vier ebene Flächen erfordert, weil weder zwo noch drey derselben einen Körper einschließen können. Diese ebene Flächen werden die **Seitenflächen**, und deren Grenzen, wenn es gerade Linien, die **Seitenlinien** der Körper genennet.

Bey allen Körpern vereinigen sich wenigstens drey dieser Seitenlinien in einem Punct. Dieser Vereinigungspunct wird eine **solide Ecke** genennet.

Nach der Vielheit der Seiten, welche eine Ecke bilden, entstehet die Benennung der Ecken, so sind z. E. dreyseitige, vierseitige u. s. w.

Die **Summa** aller Winkel einer jeden Ecke ist allemal **kleiner**, als vier rechte Winkel. Denn aus diesen bestehet ein Cirkel; es kann also aus selbigen keine Ecke entstehen, sondern sie würden in eine Ebene zusammen fallen.

§. 165.

§. 165. Es giebt reguläre und irreguläre Körper.

Reguläre oder sogenannte platonische Körper sind, an welchen die Seiten gleichseitige Vielecke, alle Ecken aus gleich vielen Seitenlinien bestehen, und alle gleiche körperliche Winkel machen. Es sind selbiger folgende fünfe.

1) Tetraedrum, ein in vier gleichseitige Dreyecke eingeschlossener Körper, dessen körperlicher Winkel oder die Ecke $= 3 . 60^{\circ} = 180$ Grad, weil der Winkel eines gleichseitigen Dreyecks nach §. 56 $= 60$ Grad und hier drey Winkel eine Ecke ausmachen.

2) Cubus Hexaedrum, Würfel, dessen Oberfläche bestehet aus sechs gleich großen Quadraten, wovon allezeit drey Winkel an einer Ecke zusammen kommen. Da nun der Winkel eines Quadrats nach §. 18 $= 90$ Grad, so ist der körperliche Winkel eines Cubi $= 90^{\circ} . 3 = 270$ Grad.

3) Octoedrum, seine Oberflächen sind acht gleichseitige Dreyecke, wovon allezeit vier Dreyecke an einer Ecke zusammen kommen, es ist dahero auch sein körperlicher Winkel $= 60^{\circ} . 4 = 240^{\circ}$ Grad.

4) Dodecaedrum entstehet aus zwölf regulären und gleich großen Fünfecken, wovon allezeit drey in einer Ecke zusammen stoßen. Da nun der Polygonwinkel eines regulären Fünfecks nach §. 115

$$= 180 - \frac{360}{5} = 180 - 72 = 108 \text{ Grad},$$

so ist der körperliche Winkel eines Dodecaedri $= 108 . 3 = 324$ Grad.

5) Icosaedrum ist in zwanzig gleichseitige gleich große Dreyecke eingeschlossen, wovon allezeit fünf Dreyecke in einer Ecke zusammen kommen, sein körperlicher Winkel ist also 60°.5 = 300 Grad.

Mehrere reguläre Körper kann es nicht geben, denn würden noch mehrere als angezeigte Flächen, an einem Körper zusammen stoßen, so würde die Ecke oder körperlicher Winkel entweder = 360, oder größer als 360 Grad seyn, also nach §. 164 entweder = Cirkel werden, oder gar in eine Ebene fallen.

§. 166. Unter allen Körpern, welche in solche Ebenen eingeschlossen, die ihren Grund in der geraden Linie und Cirkel haben, sind zu der Untersuchung in Absicht ihrer Eigenschaften die nöthigsten und nützlichsten, das Prisma, Parallelopipedum, Cubus, Cylinder, Pyramide, Kegel und Kugel.

§. 167. Ein **Prisma** entstehet auf folgende Art.

Man zeichnet Fig. 120 in einer Ebene eine Fig. 120. geradlinigte Figur von viel oder wenig Seiten, welche unter jedem Winkel an einander liegen können, wie z. E. abcde. Auf der Spitze dieser Winkel, z. E. a, ziehet man in willkührlicher Lage und Länge die Linie af, und mit selbiger durch alle übrige Spitzen der Figur abcde die Parallelen bg, ch, di, ek. Aus dem willkührlich angenommenen Endpunct f der Linie af ziehet man ferner zu ab die Parallele fg, aus g zu bc die Paralle-

rallele gh, aus h zu cd die Parallele hi, aus k zu ed die Parallele ki, aus f zu ae die Parallele fk. Stehet alsdenn z. E. af auf ab senkrecht, so stehen auch die mit af gezogene Parallelen auf ihrer Grundlinie senkrecht und es entstehet ein **gerades Prisma.** Stehet aber af auf ab, und also auch die mit af gezogene Parallelen auf ihren Grundlinien unter einem schiefen Winkel, so entstehet **ein schiefes Prisma.**

§. 168. Die Oberflächen eines jeden **Prisma** bekommen folgende Namen.

Grundfläche, auf welche der Körper gleichsam ruhet, z. E. Fig. 120 abcde. Fig. 120.

Oberfläche, welche ihn decket, z. E. fghik.

Seitenflächen, welche ihn umgeben, z. E. abfg, ghbc, hcdi, afek, kedi.

Von diesen Oberflächen sind

1) **Ober- und Grundfläche einander kongruent,** denn sie bestehen aus einerley gleich großen Figuren und sind einander parallel. Es ist also Fig. 120 Grundfläche abcde ≅ Oberfläche fghik. Denn ab ≅ fg, bc ≅ gh, cd ≅ hi, ed ≅ ki, ae ≅ fk.

Es sind also auch die Winkel gleich und ähnlich, also abc ≅ fgh ≅ bcd ≅ ghi u. s. w. Man kann dahero die Grundfläche für die Oberfläche, und diese für jene nehmen, und alle Durchschnitte, welche in einem jeden Prisma mit der Grundfläche oder Oberfläche parallel geschehen, müssen auch einer von diesen beyden Flächen gleich und ähnlich seyn.

2) Alle Seitenflächen eines Prisma sind Parallelogrammen, welche, wenn die Grundfläche ein reguläres Vieleck, einander gleich und ähnlich sind. Da nun Fig. 120 ab = fg, und af = bg, so ist afbg = Paralleloaram, da nun ferner ab = bc = cd = de = ea = fg = gh = hi = ik = ki und af = bg = hc = id = ke, so ist afbg = bghc = chid = dike = kefa = Parallelogram.

§. 169. Ein jedes Prisma hat so viel Seitenflächen, als die Grundfläche Seitenlinien hat, und bekommt auch hiernach den Namen. Man hat also dreyseitige, vierseitige, fünfseitige Prismata u. s. w.

§. 170. Die Höhe eines Prisma bestimmet die Entfernung der Grundfläche von der Oberfläche, oder welches nach §. 168 einerley, die Entfernung beyder von einander.

Bey einem geraden Prisma ist also jede Seitenlinie, bey einem schiefen hingegen die von einer Grundfläche auf die andre gefällete Perpendikulare die Höhe.

§. 171. Alle Prismata von kongruenten Grundflächen, Seitenflächen und gleichen Höhen sind gleich groß.

§. 172. Prismata, deren Grundflächen Parallelogrammen, werden Parallelopipeda genennet. Ist alsdenn die Grundfläche ein Rechteck, so entstehet ein rechtwinkligtes Parallelopipedum. Außer dem sind selbige gerade und schief.

§. 173. Ein gerades rechtwinkligtes Parallelopipedum bestehet aus sechs Oberflächen, nemlich zwo Grund- und vier Seitenflächen. Diese

sind

sind sämtlich Parallelogrammen, wovon allemal zwey einander entgegengesetzte Seiten parallel und gleich groß sind. Es ist also Fig. 121

ghab ∥ und ⩭ fedc
gfad ∥ und ⩭ hebc
adbe ∥ und ⩭ gfhe

daß adbe ∥ und ⩭ gfhe, erfordert keines Beweises, weil solches aus der Beschreibung eines Prisma §. 168 folget. Von denen übrigen Seitenflächen lässet es sich leicht beweisen, z. E. daß gfad ∥ und ⩭ hebc beruhet darauf, weil adbe ∥ und ⩭ gfhe, so ist gf = und ∥ und he, hb = und ∥ ga, und der Winkel ehb = dem Winkel fga, weil dieser Winkelschenkel parallel und in zwo Ebenen liegen.

Da nun dieses von allen übrigen Linien und Winkeln bewiesen werden kann, so sind selbige kongruent. Da ferner beyde Ebenen sowohl gfad als hebc, durch die Linien eh, gf, bc, hd, die einander parallel, gehen, so sind auch diese Ebenen parallel.

§. 174. Wenn sowohl die Grund- als Seitenflächen eines Prisma = einem Quadrat wie Fig. 122, so entstet ein Cubus oder Würfel, welcher also in sechs gleich große Quadrate eingeschlossen. Fig. 122.

Bey einem Cubo ist willkührlich, welche zwo Oberflächen als Grundflächen betrachtet werden, weil alle Oberflächen von gleicher Größe.

Alle Cubi von gleichen Grundflächen sind also unter einander ⩭, und das Verhältniß der Grö-

se zwischen verschiedenen Cubis bestimmet allein das Verhältniß ihrer Seitenlinien.

§. 175. Bestehen die Grundflächen eines Prisma aus unendlich kleinen gleich großen Seiten, wie bey einem Cirkel gedacht werden kann, oder die Grunfläche ist also ein Cirkel, und man schließet durch die auf diese unendlich kleine gleich große Seiten aufgerichtete Ebenen einen Raum ein, so entstehet ein Cylinder oder Walze, wie Fig. 123. 124. Die Seitenflächen sowohl als die Grundflächen dieses Körpers bestehen aus unendlich kleinen Breiten, und also erstere aus unendlich kleinen Parallelogrammen, man kann also beyde als eine Ründung annehmen.

§. 176. Es giebt gerade und schiefe Cylinder. Erstere sind, in welchen die Linie oder Axe, durch welche die Mittelpuncte der beyden parallel liegenden cirkelförmigen Grundflächen zusammen gezogen sind, eine Perpendikulare ist. Es ist also Fig. 123 ein gerader Cylinder, weil in selbiger die Axe ik = Perpend. Hingegen Fig. 124 ist ein schiefer Cylinder, weil die Axe ik schief.

§. 177. In jedem sowohl geraden als schiefen Cylinder muß die Durchschnittsfigur, welche von einer durch jeden Cylinder mit der Grundfläche parallel gelegten Ebene entstehet, der Grundfläche nicht nur gleich und ähnlich, sondern auch mit selbiger parallel seyn. So ist z. E. Fig. 123 und Fig. 124 nhm ⌓ und ⌓ efg.
Fig. 123. Fig. 124.

Denn

Denn kc = ig = Radio, weil die Peripherie beyder Grundlinien ein Cirkel. Der Winkel kig = Winkel egi = Recto.

Ferner ki = eg.

Es ist also kigc = einem Parallelogram, welches durch die schneidende Ebene nhm in lm, welche eine gerade Linie, geschnitten wird. Diese lm ist ∥ = kc.

Ersteres, weil abc ∥ nhm, letzteres, weil Parallelen zwischen Parallelen §. 53 gleich groß. Da nun lm = und ∥ kc, ferner kc = Radio; so ist auch lm = Radio, folglich nhm ein eben so großer Cirkel als abc, oder auch wie efg.

§. 178. Die Höhe eines jeden Cylinders bestimmet eine auf beyde Grundflächen errichtete Perpendikulare, es ist also Fig. 123 ki = der Höhe des geraden Cylinder acge. Fig. 123.

§. 179. Es giebt auch Körper, welche nur eine Grundfläche haben, und anstatt der andern Grundfläche in einer Spitze sich endigen. Diese sind **Pyramide** und **Regel** Fig. 125 glom und hpr.

Erstere entstehen, wenn auf die Seitenlinien einer geradlinigten Ebene Triangel gesetzet werden, welche sich in einer Spitze vereinigen.

Letztere hingegen bestehen, wenn die Grundfläche einer Pyramide ein unendlich Eck, welches = einem Cirkel, um welchen eine gekrummte Oberfläche solchergestalt gelegt, daß selbige eine Spitze macht.

§. 180. Die Seitenflächen aller Pyramiden sind also Triangel.

Alle Pyramiden bestehen aus so viel Seitenflächen oder Triangel, als ihre Grundfläche Seitenlinien hat, und diese Vielheit bestimmet ihre Benennung. Es sind also dreyseitige, vierseitige Pyramiden u. s. w.

Die Höhe aller Pyramiden bestimmt die senkrechte Entfernung ihrer Spitze von der Grundfläche.

Fig. 125. §. 181. Wenn eine Pyramide, z. E. Fig. 125 glvm durch eine Ebene cd, welche der Ebene ef ihrer Grundfläche lvm parallel, geschnitten wird, so ist diese Durchschnittsfigur itk der Grundfläche lvm zwar ähnlich, aber nicht gleich, sondern kleiner, weil die Seitenflächen aller Pyraden Triangel sind.

Pyramiden von kongruenten Grundflächen, deren gleichnamigte Seiten gegen die Grundflächen unter gleichen Winkeln geneigt sind, sind von gleicher Größe.

§. 182. Die von der Spitze h eines Kegels hpr Fig. 125 auf die Grundfläche pr aus dem Centro q gezogene gerade Linie hq wird die Axe desselben genennet. Die Axe ist entweder perpendikular oder schief. Im erstern Fall entstehet ein gerader, bey letzterm Fall ein schiefer Kegel. Hier in Fig. 125 ist es ein gerader Kegel.

Die Höhe eines jeden Kegels bestimmt ein von der Spitze auf die Grundfläche gefälleter Perpen-

pendikel. Es ist also Fig. 125 hq = der Höhe des Kegels hpq.

Alle von der Spitze eines Kegels an die Peripherie einer Grundfläche desselben gezogene Linien werden die Seiten desselben genennet. Diese Seiten sind bey einem geraden Kegel gleich lang.

Die Durchschnittsfigur, z. E. Fig. 125 ns, welche durch die mit der Grundfläche pr eines Kegels hpr parallel liegende schneidende Ebene cd entstehet, ist zwar der Grundfläche pr ähnlich, aber nicht gleich. Sie ist also auch zwar ein Cirkel, aber kleiner wie die Grundfläche. Der Grund beruhet darauf, daß der Kegel sich in einer Spitze endiget.

§. 183. Die Kugel Fig. 126 ist ein Körper, welcher von einer gekrümmten Oberfläche dergestalt umgeben wird, daß alle in selbiger befindlichen Puncte von dem innern Mittelpunct oder Centro c dieses Körpers gleich weit entfernet sind.

Alle von diesem Centro nach der Oberfläache der Kugel gezogene gerade Linien sind nach §. 21 Radii derselben, also auch von gleicher Länge. Durch die in einerley Richtung vorgenommene Verlängerung eines dieser Radiorum, z. E. ac bis an die andere Seite der Oberfläche, entstehet ebenfalls nach §. 21 der Diameter ab.

Der Diameter einer Kugel ist also = zween Radiis, und da alle Radii in einer Kugel von gleicher Länge, so müssen auch alle in einer Kugel vorhandene Diameter einander gleich seyn.

Alle Kugeln von gleichen Radiis oder Dia-

metern sind gleich groß, und unter Kugeln von verschiedenen Diametern oder Radiis ist diejenige die größeste, welche den größesten Diameter oder Radius hat.

Alle Puncte, deren Entfernung vom Centro einer Kugel kleiner als der Radius derselben, liegen innerhalb der Kugel. Hingegen alle Puncte, deren Entfernung vom Centro einer Kugel größer als der Radius derselben, liegen außerhalb der Kugel.

Alle Kugeln sind ähnliche Körper, denn sie entstehen sämtlich auf eine ähnliche Art. Sie sind also allein in ihrer Größe verschieden.

Das zehnte Kapitel.

Von der Vergleichung der bisher betrachteten Körper unter einander und ihren Verwandlungen.

§. 184. Alle gerade und schiefe prismatische Körper, als **Prisma**, es sey von vielen oder wenig Seiten, **Parallelopipedum**, **Cubus**, **Cylinder**, sind von gleich großen körperlichen Inhalt, wenn ihre Grundflächen von gleichem Flächeninhalt, und die Höhen gleich groß sind, folglich zwischen zwo parallele Ebenen gesetzet werden können, es mögen übrigens die Grundflächen einander ähnlich seyn oder nicht.

Es

Es ist also Fig. 127 Parallelopipedum Ip = Cylinder st. Denn

1) sind beyde Körper zwischen die einander parallele Ebenen abdc und EFGH gestellet, es müssen also auch beyder Höhe, weil selbige einander parallel, nach §. 53 gleich groß seyn, es ist also ok = rt.

2) Beyder Grundflächen Inhalt wird hier von gleicher Größe angenommen, es soll also nopq = rs seyn.

Nach dieser Voraussetzung folget auch, daß die Durchschnittsfiguren beyder Körper als efgh und ik, welche durch die zwischen die Ebenen abde und EFGH parallel gelegte schneidende Ebene ABDC entstehen, nicht nur der Grundfläche ihrer Körper gleich und ähnlich, sondern auch die dadurch abgeschnittene Stücke beyder Körper von gleichen körperlichen Inhalt sind. Es ist also Fig. 127 nicht nur in dem Parallelopipedo Ip. Fig. 127.

efgh ⧦ und ⫻ nopq

und in dem Cylinder st

ik ⧦ und ⫻ rs

sondern auch

Parallelopipedum ep = Cylinder is

und Parallelopipedum lg = Cylinder tk.

Es wird dieses leicht einzusehen seyn, wenn man betrachtet, daß man durch die schneidende Ebene ABDC beyde Körper in unendlich dünne gleich viele und gleich große Scheibchen zerschneiden kann. Da nun nach der Voraussetzung, die Oberflächen dieser Scheibchen allezeit gleiches Inhalts,

halts, und diese Scheibchen unendlich dünne gedacht werden; alle diese Scheibchen aber in jedem Körper zusammen genommen, den ganzen Körper ausmachen, so müssen, da allezeit ein Scheibchen des einen Körpers so groß, wie ein Scheibchen des andern Körpers, diese Körper auch gleiches Inhalts seyn.

Auch dieses gilt von zween schiefen, oder auch einem schiefen und einem geraden prismatischen Körper, wenn nur die beschriebene Kennzeichen bey selbigen sich finden.

§. 185. Das Verhältniß des körperlichen Inhalts zwener oder mehrerer prismatischen Körper von gleichen Grundflächen aber verschiedenen Höhen, ist gleich dem Verhältniß der verschiedenen Höhen.

Es wird also das Verhältniß des körperlichen Inhalt der beyden **Prismate** ad und hp, ferner
Fig. 128. das **Prisma** ad und das **Cylinder** qr Fig. 128, welche sämtlich von verschiedener Höhe, aber in dem Flächeninhalt ihrer Grundflächen einander gleich seyn sollen, folgendes seyn.

Prisma ad : Prisma hp = Höhe as : Höhe hn
Prisma ad : Cylinder qr = Höhe as : Höhe xy.

Wenn aber zween oder mehrere prismatische Körper zwar von einerley Höhe, aber in dem Flächeninhait der Grundflächen verschieden, so ist das Verhältniß beyder körperlichen Inhalts gleich dem Verhältniß ihrer Grundflächen.

Fig. 127. Da also z. E. Fig. 127 die Höhen beyder Körper gleich groß, also ln = tr, aber die Grundflä-

flächen derselben also np und rs verschiedenes Inhalt hier seyn sollen, so wird

Parallelopipedum lp : Cylinder ts
= Flächeninhalt np : Flächeninhalt rs.

Die Richtigkeit dieses Satzes wird am deutlichsten durch die Verwandlung der gegebenen Körper in gerade Parallelopipeda in die Augen fallen. Diese Verwandlung ist sehr leicht zu bewerkstelligen, sie erfordert nur die Verwandlung der Grundflächen der gegebenen Körper in gerade Vierecke, indem die Höhen sich gleich bleiben. Wir unterlassen die weitläuftigere Ausführung hievon, und verweisen die Lehrenden und Lernenden auf das größere Werk, wovon dieses ein Auszug ist.

§. 186. Das Verhältniß des körperlichen Inhalts aller prismatischen Körper, deren Grundflächeninhalt sowohl als die Höhe verschieden, ist gleich dem Verhältniß, welches sich zwischen denen Producten, jedes Körpers Höhe mit dem Inhalt der Grundfläche multipliciret, entstehet.

Wären also z. E. Fig. 128 die beyden Prismata ad und hp nicht nur in der Höhe, sondern auch in dem Inhalt ihrer Grundflächen verschieden, so ist das Verhältniß dieser beyden Körper in Absicht ihres körperlichen Inhalts folgendes, nemlich Fig. 128.

Prisma ad : Prisma hp = as . sd : hn . np.

Um dieses zu beweisen, wollen wir beyde mit einem dritten Körper vergleichen. Es soll Fig. 128 der Cylinder qr an Höhe dem Prisma hp gleich, aber im Grundflächeninhalt verschieden; ferner dem Prisma ad zwar am Grundflächeninhalt gleich,

aber

aber in der Höhe verschieden seyn, so gelten aus dem vorhergehenden folgende Verhältnisse

Prisma ad : Cylinder qr = as : xy
Cylinder qr : Prisma hp = ry : np

Prisma ad : Prisma hp = as . ry = xy . np.
Aber die Oberfläche ry = Oberfläche sd
und die Höhe xy = Höhe hn.

Nach der Voraussetzung also, wenn man substituiret, so gilt folgende Proportion, und dadurch unser Satz.

Prisma ad : Prismo hp = as . sd : hn . np,

oder, wenn P und p die Körper, B und b die Grundflächen, A und a die Höhen bedeuten, so gilt

$$P : p = AB : ab$$

folglich $P . ab = p . AB$

Ist nun $p = P$, so wäre dahero

$$p . ab = p . AB = ab = AB$$

folglich $a : A = B : b$.

In allen prismatischen Körpern also, welche von gleichen körperlichen Inhalt, deren Grundflächen aber sowohl wie ihre Höhen verschieden sind, verhalten sich die Höhen verkehrt wie die Grundflächen, auch daher die Grundflächen verkehrt, wie die Höhen.

§. 187. Jedes Parallelopipedum ist ein prismatischer Körper. Wären also z. E. Fig. 128 ad und hp zween Parallelopipeda, welche sowohl in dem Grundflächeninhalt als Höhe verschieden, so würde es aus dem vorhergehenden wahr seyn, wenn

Fig. 128.

man

man hier das kleinere Parallelog. p und das größere P nennen wollte, daß

Parallelop. hp : Parallelop. ad = hn . np : as . sd

oder P : p = hn . np : as . sd.

Aber der Grundflächeninhalt entstehet durch die Multiplication der Länge und Breite der Seiten in einander, also

np = nq . qp und sd = sr . rd. Dieses in der Proportion substituiret, so ist folgende wahr

P : p = hn . nq . pq : as . sr . rd

oder Parallelopipeda verhalten sich, wie die Producte aus ihren Höhen, Längen und Tiefen.

§. §. 188. Ein jeder Würfel oder Cubus ist = einem Parallelopipedo von gleich langen Seiten. Es ist also dessen Höhe, Länge und Tiefe einander völlig gleich.

Wenn also die in Fig. 128 vorgestelleten Körper ad und hp = zween Würfern, folglich as = sr = rd und hn = nq = qp, so wäre das Verhältniß des körperlichen Inhalts beyder Würfel folgendes Fig. 128.

Cubus hnqp : Cubus asrd = hn . nq . qp : as . sr . rd

oder weil an jedem Cubo alle Seiten gleich lang, und man nennet eine Seite des größern Würfel L, und eine Seite des kleinern Würfel l, so verhält sich

Cubus hnqp : Cubus asrd = L . L . L : l . l . l oder

Cubus hnqp : Cubus asrd = $L^3 : l^3$.

Es bestehet also das Verhältniß des körperlichen Inhalts zweyer Würfel aus dem dreymaligen zusammengesetzten Verhältniß einer ihrer Seiten.

Auf

Auf dieses Verhältniß gründet sich die Auflösung der Aufgabe einen Cubum zu verfertigen, dessen körperlicher Inhalt zwey, drey oder $\frac{1}{4}$ mahl u. s. w. größer als ein gegebener Cubus.

Wäre also z. E $C =$ dem körperlichen Inhalt eines gegebenen Würfel, und $l =$ dessen Seite, so wäre $2C =$ dem körperlichen Inhalt eines dem Inhalt nach, noch mahl so großen Würfel und dessen Seite oder x wäre $= l.\sqrt[3]{2}$. Denn

$$C : 2C = l^3 : x^3$$

$$x^3 = \frac{2C.l^3}{C}$$

$$x^3 = l^3 2$$

$$\sqrt[3]{x^3} = \sqrt[3]{l^3 2}$$

$$x = l.\sqrt[3]{2}.$$

Wird also die Seite eines gegebenen Würfels mit der Cubicwurzel aus 2 multipliciret so ist dieses Product $=$ der Seite eines dem körperlichen Inhalt noch mal so großen Würfels.

Wird hingegen die Seite eines gegebenen Würfels mit der Cubicwurzel aus 2 dividiret, so ist der Quotient $=$ der Seite eines dem körperlichen Inhalt nach, halb so großen Würfels. Hier wäre also $x = \frac{l}{\sqrt[3]{2}}$. Denn

$$C : \frac{c}{2} = l^3 : x^3$$

$$C : \frac{C.2}{2} = l^3 : x^3.2$$

:C:C

$$C : C = l^3 : x^3 . 2$$

$$1 : 1 = l^3 : x^3 . 2$$

$$1 . x^3 . 2 = 1 . l^3$$

$$x^3 . 2 = l^3$$

$$\sqrt[3]{x^3 . 2} = \sqrt[3]{l^3}$$

$$x \sqrt[3]{2} = l$$

$$x = \frac{l}{\sqrt[3]{2}}.$$

§. 189. Alle prismatische Körper, deren Grundflächeninhalt einander proportional, das ist, wenn die Seiten der Grundflächen zwar in der Länge ungleich, aber in Ansehung der Lage, Verhältniß und Winkeln gleich, also deren Grundflächeninhalt dahero verschieden ist, verhalten sich in Ansehung ihres körperlichen Inhalts, wenn sie von **ungleicher Höhe**, wie das Product der Quadrate ihrer ähnlich liegenden Seiten der Grundfläche mit der Höhe.

Sind sie aber von gleicher Höhe, so verhalten sie sich, wie die Quadrate ihrer ähnlich liegenden Seiten.

Wären also die beyden Körper Fig. 128 ad und hp nur allein in der Größe und Höhe verschieden, so verhält sich

Prisma ad : Prisma hp = rsq . as : nqq . hn.

Wären aber beyder Körper einander gleich, also as = hn, so verhält sich

Prisma ad ; Prisma hp = rsq : nqq.

§. 190. Das Verhältniß des körperlichen Inhalts zweyer oder mehrerer Cylinder, wenn sie von ungleicher Höhe, ist gleich dem Verhältniß beyder Producte des Quadrats ihrer Diameter mit der Höhe.

Sind sie aber von gleicher Höhe, so ist das Verhältniß ihres körperlichen Inhalts gleich dem Quadrat ihrer Diameter.

Fig. 129. Ist also Fig. 129 die Höhe bc > oder < als BC, so verhält sich

Cylinder ac: Cylinder AC = abq . bc: ABq . BC

Wäre aber die Höhe bc = der Höhe BC, so verhält sich

Cylinder ac: Cylinder AC = abq: ABq.

Der Beweis beruhet darauf, daß, da die Grundflächen aller Cylinder Cirkelflächen sind, und diese unter einander ähnlich seyn, so verhalten sie sich gegen einander, wie die Quadrate ihrer Diameter.

§. 191. Ist bey geraden prismatischen Körpern, deren Grundflächen ähnlich sind, in Ansehung ihrer Höhen eben das Verhältniß, wie ihrer ähnlich liegenden Seiten, so verhalten sie sich in Ansehung ihres körperlichen Inhalts, wie die Cubi ihrer ähnlich liegenden Seiten. Man nennet solche Körper ähnliche Körper. Es sey dieses bey

Fig. 128. denen Körpern ad und hp Fig. 128, so wäre es aus vorhergehenden Betrachtungen wahr, daß

Prisma ad: Prisma hp = srq . as: nqq . hn.

Aber laut der Voraussetzung verhält sich

sr: nq = as: hn.

Man

Man kann also anstatt as die rs und anstatt hn die nq in erstere Proportion setzen, also

Prisma ad : Prisma hp = $sr^3 : nq^3$.

§. 192. Ein jedes dreyeckigtes Prisma ist die Hälfte eines Parallelopipedi von gleicher Höhe, aber von einer noch einmal so großen Grundfläche.

Es ist also Fig. 130 das dreyeckigte Prisma dbh = Parallelopipedo $\frac{df}{2}$.

Denn dc ∥ ab ∥ gh ∥ ef
da ∥ cb ∥ ge ∥ hf
folglich Parallel. dcab ∥ und = Parallel. ghef. Ferner ist gf ∥ db. Da nun sowohl gf als db Diagonalen, durch welche sowohl das Parallelogram dabc als das Parallelogram gefh in zween kongruente Theile getheilet wird, so ist sowohl dbc = dab als gef = ghf.

Die Hälfte dieser Grundfläche ist aber dem dreyeckigten Prisma eigen, und dessen Höhe = der Höhe des Parallelopipedi, folglich ist auch der körperliche Inhalt des dreyeckigten Prisma dbh = der Hälfte des körperlichen Inhalts des Parallelopipedi df.

Es folget hieraus ferner, daß eine durch die Diagonale eines Parallelopipedi gelegte Ebene, selbiges in zwey gleiche dreyeckigte Prismata theilet oder verwandelt.

§. 193. Ein jedes viereckigtes Prisma bestehet aus zwey dreyeckigten Prismaten weniger, als es Seiten hat. So bestehet z. E. ein sechs-

eckigtes Prisma aus 6—2=4 dreyeckigten Prismaten.

Der Beweis beruhet auf der in der Lehre von denen Flächen §. 59 gezeigten Eintheilung einer radlinigten Figur durch Diagonale in Dreyecke.

§. 194. Gerade **Pyramiden** sowohl als **Kegel** von gleichen Grundflächen und Höhen sind dem körperlichen Inhalt nach einander völlig gleich.

Fig. 125. Es ist also Fig. 125 **Pyramide** glm = **Kegel** hpr. Denn

1) sind nach der Voraussetzung beyder Grundflächen, dem Inhalt nach, und beyder Höhen einander gleich, also lm = pr und gn = hq. Dieses letztere beweiset sich auch dadurch, weil beyde Körper zwischen den einander parallelen Ebenen ab und ef stehen.

2) Die durch die zwischen erstere beyde parallele Ebene gelegte schneidende Ebene cd, sie liege und schneide auch Stücken ab wo sie wolle, entstehende Durchschnittsfiguren ik und ns sind einander gleich.

Daß ik = ns beweiset, weil lm ∽ ik.

Da nun ähnliche Flächen sich verhalten, wie die Quadrate ihrer ähnlich liegenden Seiten, so verhält sich auch

lm : ik = lvq : itq.

Es ist aber auch pr ∽ ns; es verhalten sich aber ähnliche Cirkelflächen gegen einander, wie die Quadrate ihrer Radiorum, also hier

pr : ns = pqq : noq.

Ferner ist it ∥ lv und pq ∥ no, folglich

lv : it = gl : gı und

pq : no = hp : hn.

Die

Die geraden Linien gl und hp werden aber durch die Ebene ed, welche denen Ebenen ab und ef parallel, geschnitten, es sind also auch die abgeschnittenen Theile beyder Linien einander proportional, oder

gl : gi = hp : hn

Da nun gl : gi = lv : it und
hp : hn = pq : no so verhält sich

lv : it = pq : no und

lvq : itq = pqq : noq.

Es ist aber lvq : itq = Fläche lm : Fläche ik
und pqq : noq = Fläche pr : Fläche ns

folglich Fläche lm ; Fläche pr = Fläche ik : Fläche ns

und Fläche lm . Fläche ns = Fläche pr . Fläche ik
da nun Fläche lm = Fläche pr

so ist Fläche ns = Fläche ik.

Würde man nun die schneidende Ebene cd beyde Körper in gleich viele und gleich dicke Scheibchen schneiden lassen, so würden diese Scheibchen einander an körperlichem Inhalt gleich seyn, weil sie in nichts von einander unterschieden wären, also würden die beyden Körper gleich seyn.

§. 195. Ein jedes gerades dreyeckigtes Prisma bestehet aus drey gleich großen Pyramiden. Es ist also Fig. 131. Fig. 131.

Pyramide abcf = Pyramide dfce = Pyram. defa
und Pyram. abcf + Pyram. dfce + Pyram. defa
= dem geraden dreyeckigten Prisma abcedf.

Zur Führung des Beweises ziehe man in beyde

de Seitenflächen des Prisma, also in abdf und bcef die Diagonalen af und fc. Würde nun durch diese beyde Diagonalen eine Ebene z. E. acf gelegt, so schnitte selbige das Stück afcb ab, welches = einer Pyramide, die zu ihrer Grundfläche abc die Grundfläche des Prisma, und zu ihrer Höhe bf die Seitenlinie des Prisma hat.

Man ziehe ferner in die Seitenfläche acde die Diagonale dc. Würde nun wieder durch beyde Diagonalen de und cf eine Ebene gelegt, so entstünde die Pyramide defc, deren Grundfläche def gleichfalls die Grundfläche des Prisma, und zu ihrer Höhe die Seitenlinie ce hat. Weil aber ce = bf und abc = dfe, so ist

Pyramide abcf = Pyramide dfec.

Das übrig gebliebene Stück adcf des Prisma ist gleichfalls eine Pyramide, deren Grundfläche adf, und ihre Spitze in c. Diese Pyramide ist der Pyramide abcf völlig gleich. Denn erwählet man in abcf zur Grundfläche afb, so wird afb = adf. Weil nun alsdenn sich auch beyder Spitzen in c endigen, so sind sie auch von gleicher Höhe. Da also

Pyramide abcf = Pyramide dfce und
Pyramide abcf = Pyramide adcf, so muß auch

Pyramide abcf = Pyramide dfce = Pyramide adcf seyn, weil zwey Dinge, die einem dritten gleich, auch unter einander gleich seyn müssen.

§. 196. Aus diesen angestelleten Betrachtungen folget.

1) Eine jede Pyramide ist der dritte Theil eines dreyeckigten Prisma, welches mit ersterer gleiche Grundfläche und Höhe hat.

2) Auch alle Kegel sind der dritte Theil eines dreyeckigten Prisma von gleicher Grundfläche und Höhe, denn Pyramiden und Kegel von gleicher Grundfläche und Höhe sind nach §. 194 einander gleich.

3) Da Cylinder und Prisma von gleichen Grundflächen und Höhen auch gleichen Inhalts sind nach §. 184, so folget auch, daß alle Kegel der dritte Theil eines Cylinders von gleicher Grundfläche und Höhe sind.

§. 197. Die Verwandlung eines jeden Kegels und Pyramide in einen prismatischen Körper von gleichem Inhalt, außer in einen Cubum, ist sehr leicht; man darf nur einen andern prismatischen Körper verfertigen, dessen Grundfläche = der Grundfläche und dessen Höhe = $\frac{1}{3}$ der Höhe des gegebenen Kegels oder Pyramide. Sollte auch die Höhe des verlangten prismatischen Körpers der Höhe des gegebenen Kegels oder Pyramide gleich seyn, so wird $\frac{1}{3}$ dieser Grundfläche zur Grundfläche des verlangten prismatischen Körpers erwählet.

§. 198. Bey der Vergleichung der Kegel und Pyramiden unter einander pflegt man gewöhnlich die Pyramiden als $\frac{1}{3}$ eines dreyeckigten Prisma, und die Kegel als $\frac{1}{3}$ eines Cylinders, bey beyden aber von gleicher Grundfläche und Höhe zu betrachten. Man weis ferner, nach §. 186, daß

das Verhältniß aller prismatischen Körper, in Ansehung ihres körperlichen Inhalts, aus dem Verhältniß ihrer Grundflächen und Höhen zusammen gesetzet ist. Wir wollen nun die Höhe der Pyramide gdef = A, die Höhe des Kegels ecd = a, die Grundfläche der Pyramide = B, die Grundfläche des Kegels = b setzen. Nach §. 197 sey ferner das Prisma abdef = der Pyramide gdef und der Cylinder abcd = dem Kegel ecd, so ist also die Höhe bf des Prisma = $\frac{1}{3}$ A, und die Höhe bd des Cylinders = $\frac{1}{3}$ a. Nun sey Prisma und Pyramide, weil beyde gleich groß, = C, und Kegel und Cylinder = C, so folget also, daß

Fig. 131. b.

$$C : c = \tfrac{1}{3} A . B : \tfrac{1}{3} a . b$$

$$C : c = AB : ab$$

oder das Verhältniß der Kegel und Pyramiden ist aus dem Verhältniß ihrer Grundflächen und Höhen zusammen gesetzt.

§. 199. Alle Kegel oder Pyramiden von gleicher Grundfläche, aber verschiedener Höhe, verhalten sich in Absicht ihres körperlichen Inhalts, wie ihre Höhen. Da also

$$C : c = AB : ab,$$

so wird, wenn B = b

$$C : c = A : a.$$

Alle Kegel oder Pyramiden von gleicher Höhe, aber verschiedener Grundfläche verhalten sich in Absicht ihres körperlichen Inhalts hingegen, wie ihre Grundflächen; denn es war

C : c

C : c = AB : ab

wenn nun A = a

---

so wird C : c = B : b.

In allen Kegeln oder auch Pyramiden, welche an körperlichem Inhalt einander gleich, aber sowohl in der Grundfläche als Höhe verschieden, verhalten sich die Höhen gegen einander, wie ihre Grundflächen verkehrt genommen, und die Grundflächen gegen einander, wie ihre Höhen verkehrt genommen. Z. E. da

C : c = AB : ab

---

so ist C . ab = c . AB

Es sey nun C = c

---

so ist ab = AB

---

folglich a : A = B : b

---

oder b : B = A : a.

Alle Pyramiden, deren Grundflächen einander ähnlich sind, verhalten sich gegen einander, wie die Producte ihrer Höhen mit dem Quadrat der ähnlich liegen n Seiten ihrer Grundflächen. So wird also, wen L = der Seite der einen Pyramiden Grundfläche, und l = der Seite der Grundfläche der andern Pyramide, und L mit l in der Lage ähnlich, auch B ∽ b.

C : c = Lq . A : lq . a.

Da alle Kegel einander ähnlich sind, weil ihre Grundflächen Cirkel, so ist allemal das Verhältniß ihres körperlichen Inhalts aus den Verhältnissen ihrer Höhen und des Quadrats ihrer

Radiorum zusammen gesetzet. Wenn also L und l = denen Radiis beyder Kegel, so wird das Verhältniß ihres körperlichen Inhalts

$$C : c = ALq : alq.$$

Alle einander ähnliche Pyramiden und Kegel, in welchen also nicht nur die Grundflächen einander ähnlich, sondern auch die Höhen von denen ihnen ähnlich liegenden Seiten einander proportional sind, verhalten sich bey erstern gegen einander, wie die Cubi der ähnlich liegenden Seiten ihrer Grundfläche; bey letztern aber wie die Cubi der Radiorum ihrer Grundflächen.

Wäre also $A = L$ und $a = l$, so würde man an statt

$$C : c = ALq : alq$$

setzen $C : c = L.Lq : l.lq$

also $C : c = L^3 : l^3$.

Das eilfte Kapitel.

Von der Ausmessung der bisher betrachteten Körper.

§. 200. Die Ausmessung aller Körper geschiehet durch die Vergleichung derselben mit einem zu einer gewissen Größe angenommenen Cubo oder Würfel.

Dieser Würfel bekommt nach der angenommenen Größe folgende Namen.

Cubic-

Cubicruthe, Cubicfuß, Cubiczoll, Cubiclinien u. s. w.

Cubicruthe ist ein Würfel, dessen eine Seite = 1 Ruthe.

Cubicfuß ist ein Würfel, dessen eine Seite = 1 Fuß.

Cubiczoll ist ein Würfel, dessen eine Seite = 1 Zoll u. s. w.

Weil aber ein Cubus ein Körper, dessen Höhe, Breite und Tiefe nach §. 174 völlig gleich, und eine Ruthe nach §. 74 in Decimallängenmaaß = 10 Fuß, in Duodecimallängenmaaß hingegen 12 Fuß, so ist also der körperliche Inhalt eines Cubi, dessen eine Seite = einer Ruthe, folglich auch eine Cubicruthe in Fußen nach dem Decimalmaaß = 10. 10. 10 = 1000 Fuß, nach dem Duodecimalmaaß hingegen = 12. 12. 12 = 1728 Fuß.

Da ferner nach §. 74 ein Decimalfuß = 10 Zoll, ein Decimalzoll = 10 Linien, so ist eine Cubicruthe im Decimalmaaße = 1000000 Zoll und = 1000000000 Linien.

§. 201. Das Decimalmaaß ist bey Berechnung des körperlichen Inhalts der Körper auch aus eben denen bey Berechnung des Flächeninhalts angeführten Ursachen eingeführet. Man kann also auch hier eben so leicht, wie bey erstern, eine Anzahl Einheiten von einer geringern Benennung zu einer höhern bringen, und diese in geringere verwandeln. Z. E. man wollte

3674285 Cubiclinien

zu

zu denen in selbigen vorhandenen höhern Benennungen bringen, so schneidet man von der rechten gegen die linke Hand jedesmal drey Zahlen ab, weil dieses eben das ist, als ob man sie durch 1000 dividirete, und bezeichnet die erste in jeder erhaltenen Klasse befindliche Zahl mit den bey dem Längenmaaß §. 74 gelehrten Zeichen; es wäre also 3674285 Cubiclinien = 3674285‴ = 3,674″,285‴ = 3 Cubicfuß, 674 Cubiczoll, 285 Cubiclinien Decimalmaaß; oder man sollte 39,732′,827″ = 39 Cubicruthen, 732 Cubicfuß, 827 Cubiczoll in die geringste hier gegebene Benennung, also in Cubiczoll, verwandeln, so setzet man diese gegebenen Grösen nur an einander und bemerket die letzte Zahl zur rechten Hand, also hier die 7, mit dem Zeichen der Zoll, weil dieses eben das ist, als ob man zuforderst die Ruthen durch die Multiplication mit 1000 zu Fuße, zu diesem Product die 732 Fuß addiret, diese Summe der Fuße wieder durch die Multiplication mit 1000 zu Zolle, und zu diesem Product 827 Zoll addiret hätte. Es wäre also 39,732′,827″ = 39732827″ = 39732827 Cubiczoll Decimalmaaß.

§. 202. Es ist oft erforderlich, entweder das Decimalcubicmaaß in Duodecimalcubicmaaß, oder dieses in ersteres zu verwandeln, oder auch wol eines von beyden in verschiedene andere gegebene Cubicmaaße zu verwandeln.

Die Lehre von der geometrischen Proportion giebet hiezu die Anweisung, sie setzet aber die Kennt-

niß des geometrischen Verhältnisses der gegebenen Maaßen in Ansehung ihrer Länge zum voraus.

Z. E. es ist bekannt, daß 1000 Cubicfuß = 1 R. Decimalcubicmaaß, und 1728 Cubicfuß = 1 R. Duodecimalcubicmaaß; bey beyden aber ist die Ruthe in Absicht der Länge gleich, also nur allein in der Eintheilung unterschieden. Wollte man nun 50 Decimalcubicfuß in Duodecimalcubicfuß verwandeln, so schließet man

1000 Cubicf. : 50 Cubicf. = 1728 Cubicf. : x Cubicf.

Es ist also $x = \frac{1728.50}{1000} = \frac{86400}{1000} = \frac{864}{10} = 86,4$ = 86,4 Cubicfuß im Duodecimalmaaße.

Will man diese $\frac{4}{10}$ Cubicfuß genauer bestimmen, so multipliciret man $\frac{4}{10}$ mit 1728, weil diese = den Zollen, aus welchen ein Duodecimalcubicfuß bestehet. Es wäre also $\frac{4.1728}{10} = \frac{6912}{10} =$ 691,2 Cubiczoll, und 50 Fuß Decimalcubicmaaß sind also = 86′,691,2″ Duodecimalcubicmaaß.

Aus der Lehre von den Proportionen ist aber auch bekannt, daß ein jedes geometrisches Verhältniß als ein Bruch betrachtet, und mit ähnlichen Gliedern einerley Veränderung vorgenommen werden kann, man könnte also ersteres Exempel auch auf folgende Art aufsetzen.

$\frac{50}{1000} = \frac{x}{1728}$, es würde alsdenn $x = \frac{50.1728}{1000}$ $= \frac{86400}{1000} = 86,4$, mithin ersterer erhaltenen Größe völlig gleich seyn.

§. 203.

§. 203. Wir gehen zur wirklichen Ausmessung der Körper.

Der körperliche Inhalt eines Cubi oder Würfels ist nun = der dritten Potenz eines seiner Seiten. Der allgemeine Ausdruck des körperlichen Inhalts eines Cubi, dessen eine Seite = l, ist l^3. Wäre nun l = 3 Fuß 2 Zoll = 32″, so ist l^3 = 32″. 32″. 32″ = 32768‴ = 32,768″ = 32 Fuß, 768 Zoll Decimalcubicmaaß = dem körperlichen Inhalt eines Cubi, dessen eine Seite = l = 32″.

§. 204. Den Flächeninhalt aller Oberflächen eines Cubi zu bestimmen, ist nur nöthig, den Quadratinhalt einer Oberfläche mit der Zahl der Oberflächen zu multipliciren. Wäre also die eine Seite des Cubi = 32″, so ist 32″. 32″ = 1024‴ = 10,24″ = dem Quadratinhalt einer Oberfläche. Da nun ein Cubus nach §. 174 aus sechs gleich großen Oberflächen bestehet, so ist 1024‴. 6 = 6144‴ = 61,44″ = 61 Fuß 44 Zoll Decimalquadratmaaße = der Summa des Flächeninhalts aller Oberflächen eines Cubi, dessen Länge einer Seite = 32″.

§. 205. Der körperliche Inhalt aller geraden oder schiefen **Parallelopipeden, Prismaren** und **Cylinder** ist = dem Product, welches durch die Multiplication des Quadratinhalts ihrer Grundflächen mit der Höhe entstehet. Es würde also

1) der körperliche Inhalt des **Parallelopepi**-
Fig. di ghc Fig. 121, dessen Grundfläche abcd Inhalt
121. = 190″ und Höhe hb = 10″ folgender seyn: 190″
. 10 =

.10 = 1900″ = 1,900″ = 1 F. 900 Zoll Decimalcubicmaaße.

2) Der körperliche Inhalt des Prisma ard Fig. 128, dessen Grundfläche srdt Inhalt = 200″ und Höhe as = 17″ seyn soll, folgender seyn: 200″. 17″ = 3400‴ = 3,400‴ = 3 Fuß 400 Zoll Decimalcubicmaaße. Fig. 128.

3) Weil Cylinder und Prismata von gleichen Höhen und Grundflächen nach §. 196 einander gleich sind, so kann also auch der körperliche Inhalt eines Cylinders eben so wie eines Prismatis berechnet werden. Es wäre also der körperliche Inhalt des Cylinders trs Fig. 127, dessen Grundfläche rs Inhalt = 2,54′,34″ und die Höhe rt = 17″0‴ seyn soll, folgender, nemlich 25434. 170 = 4323780‴ = 4,323′,780‴ = 4 Fuß, 323 Zoll, 780 Linien Decimalcubicmaaße. Fig. 127.

§. 206. Ein jedes Parallelopipedum bestehet nach §. 173 aus 6 Oberflächen, wovon jedesmal zwo einander entgegen stehende gleich und ähnlich, sie werden also als quadratische Flächen berechnet und alsdenn addiret. Es sey z. E. Fig. 121 in dem Parallelopipedo ghc der Inhalt der Grundfläche ghef = gh . he = 5′. 3′ = 15′ = 15 Fuß quadr. Der Inhalt der Seitenfläche hbce = hb . bc = 2′. 3′ = 6 Fuß quadr. Der Inhalt der Seitenfläche ghab = ab . hb = 5′. 2′ = 10 Fuß quadrat. So sind diese 3 Flächen zusammen genommen = 15 + 6 + 10 = 31 Quadratfuß, und der Inhalt aller sechs Oberflächen = 31 . 2 = 62 Quadratfuß.

Wenn

Wenn man also von einem Parallelopepido nur 3 Oberflächen, nemlich eine Grundfläche und zwo verschiedene Seitenflächen berechnet, und sämtlicher Inhalt addiret hat, so giebt das Duplum dieser Summe den Flächeninhalt aller Oberflächen.

§. 207. Die Oberflächen eines jeden geraden Prisma sind Rechtecke; berechnet man also nach §. 76 eine jede dieser Seiten und Grundflächen, und addiret deren sämtlichen Inhalt, so giebt die Summe den Quadratinhalt aller Oberflächen eines geraden Prisma.

Die Oberflächen eines schiefen Prisma sind sämtlich Rhombi. Man berechnet eines jeden Quadratinhalt nach §. 77, addiret sämtlicher Quadratinhalt, so ist diese Summe = dem Flächeninhalt aller Oberflächen eines schiefen Prisma.

§. 208. Der Quadratinhalt der Oberfläche eines geraden Cylinders ist = der Summe des Quadratinhalts beyder Grundflächen und der krummen Oberfläche.

Die Berechnung der krummen Oberfläche geschiehet auf folgende Art.

Man verwandelt die krumme Oberfläche in eine gerade Linie, und multiplicirt deren Länge mit der Höhe des Cylinders, so ist dieses Product = dem Quadratinhalt der krummen Oberfläche.

Di Verwandlung der krummen Oberfläche in eine gerade Linie geschiehet durch Hülfe der in der Lehre vom Cirkel §. 123 für jede Peripherie eines Cirkels gezeigten Formel. Diese war dP oder auch

2rP,

2rP, in welcher d = 2r = 2 Radiis = Diameter und P = 3,141....

Wenn also der Diameter eines Cylinders = 20″ und die Höhe des Cylinders = 17″, so wäre 20″.17″.3,141 = 1067,940″ = 1067″94‴ = dem Quadratinhalt der krummen Oberfläche des Cylinders.

Der Quadratinhalt beyder Grundflächen wird nach der gleichfalls §. 127 gelehrten allgemeinen Formel von dem Flächeninhalt der Oberfläche eines Cirkels berechnet. Da nun die Oberfläche eines Cirkels $= \frac{d^2P}{4}$, also hier beyder Grundflächeninhalt $= \frac{2d^2P}{4} = \frac{d^2P}{2}$, so wird, da hier d = 20″ und P = 3,141, also $\frac{d^2P}{2} = \frac{20.20.3,141}{2} = \frac{400.3,141}{2} = 200.3,141 = 628,200 = 6$ Fuß, 28 Zoll, 20 Linien Quadratmaaße = dem Flächeninhalt beyder Grundflächen des Cylinders. Wird nun zu diesem Flächeninhalt der erst berechnete Flächeninhalt der krummen Oberfläche, nemlich 10 Fuß, 67 Zoll, 94 Linien Quadratmaaße addiret, so ist 628,200 + 1067,94 = 1696,140 = 16 Fuß, 96 Zoll, 14 Linien Quadratmaaße = dem Quadratinhalt der ganzen Oberfläche eines geraden Cylinders, dessen Diameter = 20 Zoll, und dessen Höhe = 17 Zoll.

Die Oberfläche eines schiefen Cylinders zu

berechnen, übergehen wir hier, weil selbiges nicht zu denen erstern Anfangsgründen gehöret.

Fig. 132. §. 209. Ein cylindrische Röhre Fig. 132 ist, wenn in einem Cylinder ABCD sich eine cylindrische Hölung abcd befindet, welche aber mit dem Cylinder ABCD einerley Axe nm hat. Eine jede runde Röhre, z. E. ein gerades Futteral, stellet eine cylindrische Röhre vor. Auch diese kann cubisch berechnet werden, wenn nur die Höhe der ganzen Röhre, der Diameter der Grundfläche der ganzen Röhre mit Inbegrif der Hölung, also CD, ferner der Diameter der Hölung oder cd bekannt.

Man berechnet alsdenn zuerst den ganzen Cylinder ABCD, und hierauf die Hölung abcd gleichfalls als einen vollen Cylinder, ziehet letzteren Inhalt von ersterm ab, so ist die Differenz = dem körperlichen Inhalt der Röhre.

Man kann hiezu leicht eine Formel finden. Es sey die Höhe der Röhre = a, der Diameter CD ihrer Grundfläche = 2R, der Diameter cd ihrer Hölung = 2r, so wäre der körperliche Inhalt des Cylinders, wenn er voll wäre, = $a . R^2 . P$, und der körperliche Inhalt der Hölung = $a . r^2 . P$, also die Röhre selbst = $aR^2P - ar^2P = (R^2 - r^2) aP$.

Auf gleiche Weise verfähret man bey Berechnung einer vier-, fünf- oder mehrseitigen cylindrischen Röhre.

Man berechnet nemlich zuerst den ganzen Cylinder, und demnächst die Oefnung wieder als einen

nen

nen vollen Cylinder, ziehet letztern von ersterm ab, so giebt gleichfalls die Differenz den körperlichen Inhalt der gegebenen cylindrischen Röhre.

§. 210. Der körperliche Inhalt einer jeden Pyramide ist = dem Product des Quadratinhalts ihrer Grundfläche mit dem dritten Theil ihrer Höhe.

Der Grund dieser Berechnung beruhet auf der Gewißheit, daß eine Pyramide der dritte Theil eines prismatischen Körpers ist, welcher mit ersterer gleiche Grundfläche und Höhe hat. Wenn also Fig. 125 der Quadratinhalt der Grundfläche lm der Pyramide glvm = 14″ Quadratmaaße und die Höhe gn = 18″, so ist $14 . \frac{18}{3} = 14 . 6 = 64'' =$ 64 Cubiczoll = dem körperlichen Inhalt der Pyramide glvm. Fig. 125.

§. 211. Die Seitenflächen einer jeden Pyramide sind nach §. 180 Dreyecke. Sind diese Flächen gleich, welches alsdenn ist, wenn die Grundfläche ein reguläres Polygon, so berechnet man eine Seitenfläche derselben als ein Dreyeck, und multipliciret diesen Quadratinhalt mit der Zahl der Seitenflächen, so giebt das Product den Quadratinhalt aller Seitenflächen; addiret man ferner hiezu den Quadratinhalt der Grundfläche, so giebt diese Summe den Quadratinhalt aller Seiten und Grundflächen, oder aller Oberflächen einer Pyramide.

Ist aber die Grundfläche der Pyramide ein irreguläres Polygon, so muß man jede Sei-

tenfläche besonders als die Oberfläche eines Triangels berechnen, und alsdenn zu dieser sämtlichen Summe den Grundflächeninhalt addiren.

§. 212. Wenn von einer Pyramide, sie sey von viel oder wenig Seiten, durch eine mit der Grundfläche parallele Ebene ein Stück abgeschnitten wird, so entstehet durch das überbliebene Stück Fig. 125. eine abgekürzte Pyramide. Es ist also Fig. 125 ilvm = einer abgekürzten Pyramide. Die Berechnung des körperlichen Inhalts derselben bestehet in folgenden.

1) Beyder Grundflächen ik und lm Quadratinhalt wird berechnet und addiret.

2) Beyder Grundflächen ik und lm berechneter Quadratinhalt wird mit einander multipliciret, und aus diesem Product die Quadratwurzel gezogen.

3) Diese erhaltene Quadratwurzel wird zu der unter Nr. 1 erhaltenen Summe addiret.

4) Diese neuerhaltene Summe wird mit der Höhe on der abgekürzten Pyramide ilvm multipliciret, und endlich

5) dieses Product durch 3 dividiret.

Diese sämtliche gegebene Regeln werden durch folgende allgemeine Formel angezeiget.

$$\frac{(BS + S + \sqrt{BS})f}{3}.$$

In eben jetzt angeführter allgemeinen Formel ist B = dem Quadratinhalt der Grundfläche lm, S = dem Quadratinhalt der Grundfläche ik, f = der Höhe on der abgekürzten Pyramide ilvm.

So-

Sowohl die Erfindung als der Beweis der Richtigkeit derselben ist in dem grössern Werke pag. 415 u. f. w. weitläuftig ausgeführet, und würde für diesen Auszug zu schwer und zu weitläuftig geworden seyn.

Wenn nun hier Fig. 125 (Fig. 125.)

der Quadratinhalt der Grundfläche lm = B
= 14″ Quadratmaaße.

Der Quadratinhalt der Grundfläche ik = S
= 8″ Quadratmaaße.

Die Höhe nm der abgekürzten Pyramide = f
= 8″ Längenmaaße,

so wäre

$$\frac{(B+S+\sqrt{BS})f}{3} = \frac{(14+8+\sqrt{14.8})8}{3} =$$

$$\frac{(22+\sqrt{112})8}{3} = \frac{22+10,583.8}{3} = \frac{32,583.8}{3}$$

$$= \frac{260,664}{3} = 86,888'' = 86 \text{ Zoll, } 888 \text{ Linien Cubicmaaße} =$$

dem körperlichen Inhalt der abgekürzten Pyramide ilvm.

Die Seitenflächen dieser abgekürzten Pyramide, wie z. E. itlv, tvmk, werden als Vierecke, die zwo parallele Seiten, oder als Trapezia berechnet, denn hier ist z. E. lv ∥ it und vm ∥ tk. Die Summe des Quadratinhalts aller dieser Seitenflächen zu der Summe des Quadratinhalts beyder Grundflächen lvm und itk addiret, ist alsdenn = dem Flächeninhalt der ganzen Oberfläche der abgekürzten Pyramide.

§. 213. Der körperliche Inhalt eines Kegels ist = dem Product, welches durch die Multiplication des Quadratinhalts seiner Grundfläche mit dem dritten Theil seiner Höhe entstehet.

Wenn also A = dem Quadratinhalt der Grundfläche pr des Kegels hpr Fig 125, und f = der Höhe hq desselben, so wäre der allgemeine Ausdruck für den körperlichen Inhalt eines Kegels

Fig. 125.

$$\frac{Af}{3}.$$

Da aber die Grundfläche eines Kegels = einem Cirkel §. 179, und der allgemeine Ausdruck für den Quadratinhalt eines Cirkels, dessen Diameter bekannt, nach §. 127 = r^2P, oder auch $\frac{d^2P}{4}$, in welchen beyden P = 3,141.. so ist auch entweder

$$\frac{Af}{3} = \frac{r^2Pf}{3}, \text{ oder auch } \frac{Af}{3} = \frac{d^2Pf}{3.4} = \frac{d^2Pf}{12}.$$

Wäre also Fig. 125 der Radius pq = r = 4″, die Höhe hq = f = 18″, so ist der körperliche Inhalt des Kegels hpr nach der allgemeinen Formel

$$\frac{Af}{3}, \text{ welche hier} = \frac{r^2Pf}{3} = \frac{4^2.18.3,141}{3} = \frac{16.18.3,141}{3}$$

= 16.6.3,141 = 301,536 = 301 Zoll, 536 Linien Cubicmaaße.

Da nun der Diameter = zween Radiis und der Radius hier = 4″, so wäre der Diameter dieses Kegels = 2.4 = 8″, also auch

$$\frac{Af}{3}$$

$$\frac{Af}{3} = \frac{d^2Pf}{12} = \frac{8^2.18.3,141}{12} = \frac{64.18.3,141}{12} =$$

$$\frac{3618,432}{12} = 301,536 = 301 \text{ Zoll, } 536 \text{ Linien Cu-}$$

bicmaaße.

§. 214. Der allgemeine Ausdruck für den Oberflächeninhalt eines geraden Kegels ohne dessen Grundfläche ist

$$rP\sqrt{(a^2 + r^2)}$$

Für den Inhalt seiner Grundflächen aber, welche = einem Cirkel r^2P.

In ersterer ist a = der Höhe des Kegels, in beyden aber r = Radio oder halben Diameter der Grundfläche des Kegels, und P = 3,141..

Wird also nach ersterer Formel der Radius eines Kegels Grundfläche mit 3,141 multipliciret, und dieses Product wieder mit der Quadratwurzel der Summe der zu der zwoten Potenz erhobenen Höhe und Radii multipliciret, so ist dieses Product = dem Flächeninhalt des Kegels ohne seine Grundfläche. Addiret man aber hiezu das Product, welches durch die Multiplication des zu der zwoten Potenz erhobenen Radii mit 3,141 entstanden, so giebt diese Summe den Quadratinhalt der ganzen Oberfläche des Kegels. Es ist also die ganze Oberfläche des Kegels mit Inbegrif seiner Grundfläche allgemein ausgedruckt

$$rP\sqrt{(a^2 + r^2)} + r^2P.$$

§. 215. Der cubische Inhalt eines durch eine mit der Grundfläche des Kegels parallele Ebe-

Fig. ne abgekürzten geraden Kegels, wie z. E. npr Fig. 125. 125, wird durch folgende allgemeine Formel ausgedruckt $(R^2 + rR + r^2)\frac{Ph}{3}$.

Hier ist R = dem Radio der größesten Grundfläche, z. E. pq, r = dem Radio der kleinern Grundfläche, z. E. no, P = 3,141.. und h = der Axe des abgekürzeten Kegels, also hier oq.

Werden also bey einem geraden abgekürzten Kegel, von dessen beyden Grundflächen der Radius und die Axe oder Höhe des abgekürzten Kegels bekannt,

1) beyde Radii besonders quadrirt;
2) beyde Radii mit einander multipliciret;
3) die Axe mit 3,141.. multipliciret;
4) erstere drey Producte addiret;
5) diese Summe mit dem Nr. 3 erhaltenen Product multipliciret;
6) dieses Product durch 3 dividiret; so ist dieser Quotient = dem körperlichen Inhalt eines abgekürzten Kegels. Z. E. wenn Fig. 125 der Radius der untern Grundfläche, also pr = R = 2″, der Radius der obern Grundfläche oder no = r = 1″, die Axe des abgekürzten Kegels oder oq = h = 8″, so würde

$$(R^2 + rR + r^2)\frac{Ph}{2} = (2^2 + 1.2 + 1^2)\frac{3,141.8}{3}$$

$$= (4 + 2 + 1)\frac{25,128}{3} = \frac{7.25,128}{3}\ 7.8,376 =$$

58,632 = 58 Zoll, 632 Linien Cubicmaaße = dem körperlichen Inhalt des abgekürzten Kegels npr.

§. 216.

§. 216. Die Oberfläche eines geraden abgekürzten Kegels, ohne seine beyden Grundflächen zu berechnen, erfordert die Kenntniß der Größe seiner beyden Grundflächen Radii, z. E. Fig. 125 die Länge pq und no, und die Länge der Seite np. Wenn dieses bekannt, so addiret man

1) beyder Grundflächen Radii.

2) Wird die Länge der Seiten np des abgekürzten Kegels mit 3,141 multipliciret,

3) dieses Product mit ersterer Summe der Radiorum nochmals multipliciret, so ist dieses neue Product = der Oberfläche des abgekürzten Kegels Quadratinhalt, ohne beyder Grundflächen Quadratinhalt. Addiret man aber

4) zu diesem Product die Summe des berechneten Quadratinhalts beyder Grundflächen, so giebt diese Summe den Quadratinhalt der ganzen Oberfläche des abgekürzten Kegels.

Die allgemeine Formel zur Bestimmung der Oberfläche eines abgekürzten Kegels Quadratinhalt, ohne beyde Grundflächen, ist $(R+r)Pe$.

Hier ist R = pq = Radio der Unterfläche des Kegels
r = no = Radio der Oberfläche des abgekürzten Kegels
e = np = der Seitenlinie des abgekürzten Kegels
$P = 3{,}141$.

Da nun der allgemeine Ausdruck für den Flächeninhalt der Grundfläche $pr = R^2P$, und der Oberfläche $ns = r^2P$, so würde der allgemeine Ausdruck

des Quadratinhalts der ganzen Oberfläche eines abgekürzten Kegels nach der vierten Regel seyn

$$(R+r)Pe+(R^2+r^2)P.$$

§. 217. Wir übergehen hier ebenfalls, sowohl die Erfindung bey der Berechnung des körperlichen als auch Flächeninhalts der Kegel, gegebenen allgemeinen Formel zu lehren, als deren Richtigkeit zu beweisen, und verweisen unsere Leser dieserhalb auf das größere Werk.

§. 218. Die Verwandlung der Körper in andere von gleichem körperlichen Inhalt kann auch durch Rechnung geschehen. Man bedienet sich hiezu der in der Arithmetik gelehrten Gleichungen, und verfähret übrigens, wie folget.

Erste Aufgabe.

Wie groß ist die Seite eines Würfels x, welcher an körperlichem Inhalt eben so groß, als ein Parallelopipedum, dessen Höhe = a, Breite = l, und Länge = f?

Auflösung.

Der körperliche Inhalt dieses Parallelopipedi würde seyn = alf, es wäre also

alf = x^3 und

$\sqrt[3]{alf} = x =$ der Seite eines Würfels, welcher am körperlichen Inhalt völlig gleich dem gegebenen Parallelopipedo.

Zweyte Aufgabe.

Wie hoch wird ein Parallelopipedon, dessen Breite, Länge, also auch der Quadratinhalt seiner Grundfläche bekannt, seyn müssen, wenn sein körperlicher Inhalt gleich dem gegebenen Cubo a^3, dessen Seite al, o = a?

Auf-

Auflösung.

Der körperliche Inhalt des gesuchten Paralle-
lopipedi ist hier $= lfx$.

folglich $lfx = a^3$

also $x = \frac{a^3}{lf}$.

Dritte Aufgabe.

Wie groß ist der Diameter der Grundfläche eines Kegels, dessen Höhe $= f$ nur allein gegeben, wenn selbiger dem körperlichen Inhalt nach dem gegebenen Parallelopipedo alf völlig gleich?

Auflösung.

Der allgemeine Ausdruck für den Inhalt eines Kegels war §. 213 $\frac{d^2Pf}{12}$.

Da nun hier $d =$ Diameter unbekannt, so ist

$$\frac{d^2Pf}{12} = \frac{x^2Pf}{12}$$

Wenn man ferner an statt den körperlichen Inhalt des Parallelopipedi, welcher $=$ alf, den Ausdruck e setzet, so wird, weil

$$e = \frac{x^2Pf}{12}$$

und $12e = x^2Pf$

also $\frac{12e}{Pf} = x^2$

folglich $\frac{\sqrt{12e}}{\sqrt{Pf}} = x =$ dem Diameter der Grundfläche des Kegels seyn.

Das zwölfte Kapitel.

Von der Kugel und den Kugelschnitten.

§. 219. Von der Kugel, deren Entstehung und einiger wenigen ihrer Eigenschaften bereits §. 183 erkläret, bemerken wir folgendes.

Ein jedes Stück, welches von einer Kugel Fig. 133. z. E. ABFEGD Fig. 133 durch eine Ebene BD oder FG, wie und in welcher Lage es auch sey, abgeschnitten worden, wird ein Abschnitt der Kugel, die Durchschnittsfigur BD oder FG ein Kugelschnitt genennet.

Der Kugelschnitt ist allemal eine Cirkelfläche, folglich ihr Umkreis auf der Kugel ein Cirkel, es mag die schneidende Ebene entweder, wie BD, durch das Centrum C der Kugel, oder durch einen andern willkührlich angenommenen Punct, wie FG, gehen.

Daß der Kugelschnitt BD, der durch das Centrum der Kugel gehet, = einer Cirkelfläche, bewiesen, weil man

1) nach allen Puncten der Peripherie BHID des Kugelschnittes BD von dem Centro C der Kugel gerade Linien ziehen kann, welche alle in dieser Ebene liegen.

2) Diese Linien z. E. CH, CB, CI, CD sind nach §. 183 Radii der Kugel, folglich unter einander völlig gleich.

Daß

Daß aber auch der Kugelschnitt FG, der nicht durch das Centrum der Kugel gehet, = einer Cirkelfläche, beweiset, weil gleichfalls MK, ML, MN = Radio der Kugel, also unter einander gleich. Der Beweis hievon beruhet auf folgenden Betrachtungen.

1) Ein aus dem Centro C der Kugel auf die außer dem Centro die Kugel schneidende Ebene gefälletes Lorh CM berühret die Durchschnittsfigur FG innerhalb der Kugel, z. E. in M, denn CM ist < als der Radius, und nach der Voraussetzung = Perpendikel.

2) Alle von dem Centro C der Kugel nach denen Puncten, wo die schneidende Ebene FG in die Kugel dringet, gezogene Linien CL, CK, CN, sind Radii der Kugel, folglich unter einander von gleicher Länge.

3) Sind diese Radii schenkelrechtwinkligter Triangel, weil bey M ein rechter Winkel.

4) Da ferner diese rechtwinkligten Triangel sämtlich die CM zum gemeinschaftlichen Schenkel haben, so folget, daß

1) $CKq = CMq + MKq$

also $CKq - MKq = CMq.$

2) $CLq = CMq + LMq$

also $CLq - LMq = CMq.$

3) $CNq = CMq + MNq$

also $CNq - MNq = CMq.$

folglich

$CKq - MKq = CLq - LMq = CNq - MNq.$

Es ist aber $CK = CL = CN =$ Radio

also MKq = LMq = MNq, oder
√MKq = √LMq = √MNq, folglich
MK = LM = MN, also auch
MK = LM = MN = CK = CL = CN = Radio.

§. 220. Aus eben jetzt angestellten Betrachtungen folget:

1) ein aus dem Mittelpunct einer Kugel auf die schneidende Ebene, welche nicht durch den Mittelpunct der Kugel gehet, gesetztes Loth, erreicht die Ebene im Centro der Durchschnittsfigur, welche ein Cirkel ist.

2) Ein aus dem Mittelpunct einer die Kugel nicht im Centro schneidende Ebene gefälletes Loth gehet durch das Centrum der Kugel.

3) Je näher die schneidende Ebene dem Mittelpunct der Kugel kommt, je größer werden die Cirkel der Durchschnittsfiguren, weil ihre Radii sich stets dem Radio der Kugel nähern.

4) Gehet die schneidende Ebene durch das Centrum der Kugel, so ist die dadurch entstehende Durchschnittsfigur der gröste Cirkel (Circulus maximus) unter allen möglichen Durchschnittsfiguren auf einer Kugel, und der Radius dieses Circuli maximi ist = dem Radio der Kugel.

5) Alle Circuli maximi einer Kugel sind einander gleich, weil ein jeder ihrer Radiorum = dem Radio der Kugel.

6) Eine jede Kugel wird durch einen Circulum maximum in zween gleiche Theile getheilet.

§. 221. Ein durch das Centrum z. E. C einer Kugel Fig. 134 von einem Ende B zum andern

dern Ende E der Peripherie gezogener Diameter BE, oder auch AD, oder jeder anderer Diameter wird die Axe und die beyden Endpuncte derselben z. E. B und E oder A und D ihre Pole genennet.

§. 222. Die Abschnitte einer Kugel sind entweder gleich, oder größer, oder kleiner als die halbe Kugel.

Von allen lässet sich der Flächen- und auch der körperliche Inhalt bestimmen. Der allgemeine Ausdruck für den Flächeninhalt eines jeden Kugelabschnitts ist $2.\varrho.P.A.H.$

Hier ist ϱ = Radio der Kugel, $P = 3,141...$, AH = der senkrechten Höhe des Kugelschnitts. Fig. 134. Fig. 134.

Wenn nun AH so groß wird wie AC, folglich = ϱ = Radio der Kugel, so ist

$$2\varrho.P.AH = 2\varrho.P.\varrho = 2.\varrho^2P$$

der allgemeine Ausdruck des Flächeninhalts einer halben Kugel, folglich

$$2.2\varrho^2.P = 4\varrho^2P$$

der Flächeninhalt einer ganzen Kugel.

Den Flächeninhalt eines Cirkels, dessen Radius bekannt, war nach §. 127 $= r^2P$. Da nun hier $\varrho = r$ und $4\varrho^2P =$ dem Flächeninhalt vier Cirkel von gleichen Radiis, so ist also der Flächeninhalt einer Kugeloberfläche gleich der Oberfläche von vier großen Cirkeln (Circulis maximis) der Kugel.

§. 223. Zu der Berechnung der Oberfläche eines Kugelabschnitts Quadratinhalt wird nach §. 220 die Höhe des Abschnitts z. E. AH Fig. 134,

und der Radius AC = ϱ der Kugel erfordert. Man kann aber auch diese AH finden, wenn nur Radius ϱ der Kugel, und der Radius = R der Grundfläche des Kugelabschnitts bekannt. Der allgemeine Ausdruck für diese gesuchte AH ist alsdenn, oder

$$AH = \varrho - \sqrt{(\varrho^2 - R^2)}.$$

§. 224. Die Cirkel BE und KG, welche auf einer Kugel Fig. 134 durch die Schneidung zwo einander parallelen Ebenen entstehen, sind parallel; und ein solcher auf der Oberfläche der Kugel zwischen zween parallelen Cirkeln befindlicher Platz, wie z. E. KBGE wird eine Zone genennet. Die Oberfläche einer Zone ist, allgemein ausgedrückt

Fig. 134.

$$2\varrho P.HC.$$

Hier ist ϱ = Radio der Kugel, P = 3,141..., HC = der Höhe der Zone. Da nun 2ϱP = der Peripherie des größesten Cirkels auf der Kugel, so ist also nach obiger Formel, das Product, welches durch die Multiplication dieser Peripherie mit der Höhe der Zone entstehet, gleich der Oberfläche der Zone KBGE.

§. 225. Die Oberflächen aller Kugeln verhalten sich gegen einander, wie die Quadrate ihrer Radiorum, oder auch ihrer Diameter.

Wenn also A und a = der Oberfläche zwoer von verschiedener Größe gegebenen Kugeln, und D = dem Diameter der Kugel A, d = Diameter der Kugel a, so ist das Verhältniß beyder Oberflächen

$$A:a = D^2:d^2$$

oder wenn R = Radio der Kugel A, und r = Radio der Kugel a, so verhält sich

$$A:a = R^2:r^2.$$

§. 226.

§. 226. Der körperliche Inhalt eines Kugelabschnitts, welcher kleiner als die Halbkugel, ist allgemein ausgedrückt $(3a\varrho - a^2)\frac{Pa}{3}$

Hier ist a = der Höhe des Abschnitts, z. E. Fig. 134 die AH, ϱ = Radius der Kugel, z. E. AC, P = 3,141 ...

Des körperlichen Inhalts einer halben Kugel allgemeiner Ausdruck ist $= \frac{2}{3} . \varrho^3 P$.

Also, die allgemeine Formel für den körperlichen Inhalt einer ganzen Kugel ist

$$2 . \tfrac{2}{3} . \varrho^3 . P = \frac{4\varrho^3 P}{3}$$

oder, weil $2\varrho = d$ = Diameter, so ist auch

$$\frac{4\varrho^3 P}{3} = \frac{d^3 P}{6}.$$

§. 227. Gerade Cylinder, Kegel und Kugeln, welche sämtlich von gleicher Höhe, und deren erstere beyde Grundflächen nicht nur unter einander gleich, sondern auch eine jede gleich dem Circulo maximo einer Kugel, verhalten sich in Absicht des körperlichen Inhalts gegen einander, wie 3 . 1 . 2.

Eine Kugel also, deren Diameter = dem Diameter der Grundfläche eines Cylinders, und ersterer Höhe, welche = Diameter, auch gleich der Höhe des Cylinders, verhält sich zu diesem Cylinder in Absicht des körperlichen Inhalts wie 3 : 2, oder eine Kugel ist der $\frac{2}{3}$ Theil eines jetzt beschriebenen Cylinders, denn 3 : 2 = Cylinder : Kugel.

Ferner das Verhältniß des körperlichen Inhalts einer Kugel gegen den körperlichen Inhalt eines Kegels, dessen Höhe sowohl als der Diameter der Grundfläche = dem Diameter der Kugel, ist

2 : 1 = Kugel : Kegel.

Also eine Kugel ist = zween jetzt beschriebenen Kegeln, oder noch einmal so groß wie ein Kegel von gleicher Höhe, und Diameter der Grundfläche.

§. 228. Der körperliche Inhalt einer Zone ist allgemein ausgedrückt

$$(3a\xi - a^2)\frac{Pa}{3} - (3b\xi - b^2)\frac{Pb}{3}$$

Fig. 134. Hier ist a = AC = der Höhe des Abschnitts Fig. 134, b = der Differenz, welche sich zwischen der Höhe AC des Kugelabschnitts und der Höhe HC der Zone KBGE befindet, P = 3,141...

§. 229. Eine Kugel verhält sich dem körperlichen Inhalt nach zu einem Cubo, dessen Seite = ersterer Diameter, beynahe wie P : 6, oder wie 3,14 : 6, oder wie 314 : 600 oder 157 : 300. Will man dieses Verhältniß genauer bestimmen, so muß P oder der Ausdruck der Peripherie des Cirkels in mehrere Decimalstellen angenommen werden. Das Verhältniß des körperlichen Inhaltes einer Kugel zu dem Cubo ihres Diameters ist also beynahe = 157 : 300.

§. 230. Kugeln von verschiedener Größe verhalten sich gegen einander in Ansehung des körperlichen Inhalts, wie die Cubi ihrer Radiorum oder auch ihrer Diameter.

Wenn

Wenn also D = Diameter der größern Kugel z. E. A, d = Diameter der kleinern Kugel a, so verhält sich

$$A : a = D^3 : d^3$$

oder wenn R = Radio der großen Kugel A, r = Radio der kleinen Kugel a, so verhält sich

$$A : a = R^3 : r^3.$$

§. 231. Aus eben jetzt gezeigtem Verhältniß des körperlichen Inhalts zwoer von verschiedener Größe gegebenen Kugeln lässet sich der Diameter, also auch der Radius einer Kugel bestimmen, welche an körperlichem Inhalt entweder größer oder kleiner, als die gegebene, ist.

Wenn nun n = der Zahl, wie vielmal die gesuchte Kugel größer oder kleiner als die gegebene Kugel, deren Diameter = D, oder der Radius = R, d = dem Diameter und r = dem Radio der gesuchten Kugel, so wird

$\sqrt[3]{n D^3} = d$ = Diameter der gesuchten Kugel, und

$\sqrt[3]{n R^3} = r$ = Radio der gesuchten Kugel.

§. 232. Alle Kugeln lassen sich in andre Körper, wovon entweder die Höhe oder Grundfläche gegeben, verwandeln.

Diese Verwandlung lässet sich aber nicht bey allen Körpern genau verrichten, wie z. E. die genaue Verwandlung einer Kugel in einen Cubum ist eben so wenig wie die genaue Verwandlung eines Cirkels in ein Quadrat möglich, weil das Verhältniß des Diameters und Peripherie irrational, diese Verwandlung aber ein rationales Verhältniß erfordert.

Die genaue Verwandlung findet also nur bey solchen Körpern statt, in welchen P oder der allgemeine Ausdruck des Verhältnisses der Peripherie zum Diameter enthalten, wie z. E. bey Cylindern, Kegeln u. s. w. sich findet.

Wir übergehen es hier aber, Aufgaben von dieser Art anzuführen, deren in dem größern Werke einige befindlich sind, weil dergleichen Aufgaben nicht für solche Anfänger seyn möchten, denen dieses Werk bestimmet, und beschließen hiemit den Auszug dieser Elementar-Geometrie.

Die

Die ebene Trigonometrie.

Das erste Kapitel.

Betrachtung der trigonometrischen Linien überhaupt.

§. 233.

Die Trigonometrie lehret, wenn von einem Triangel entweder zwo Seiten und ein Winkel, alle drey Seiten, oder eine Seite und zween Winkel bekannt, die übrigen Seiten und Winkel durch Rechnung zu finden. Man theilet sie in die ebene und sphärische Trigonometrie.

Erstere beschäftiget sich mit Triangeln, deren Seiten gerade Linien, letztere hingegen mit Triangeln, deren Seiten Bogen gröster Cirkel sind.

§. 234. Die ebene Trigonometrie, welche wir hier allein vortragen, erfordert eine Kenntniß folgender Linien, welche trigonometrische Linien genennet werden, als

Sinus, Cosinus, Sinus versus, Tangens, Corangens, Secans, Cosecans.

Verkürzt werden selbige folgendergestalt angezeiget.

Sin., Cos., S.v., Tang., Corang., Sec., Cosec.

§. 235. Der Sinus entstehet auf folgende Art. Man beschreibt aus dem Mittelpunct C einer in zween gleiche Theile getheilten geraden Linie, Fig. 135. z. E. AB Fig. 135, einen Cirkel AFBD. Aus dem Centro C richtet man auf diese gerade Linie AB, welche nun nach §. 20 = Diameter, den Perpendikel CF, so ist der Bogen FA = FB = Quadrant des Cirkels nach §. 26. Aus einem in diesem Quadranten z. E. FA willkührlich angenommenen Punct, z. E. E, ziehe man nach dem Centro C die gerade Linie EC, welche nach §. 20 = Radio, und fälle aus E auf die Linie AC, welche auch = Radio und den Quadranten FA schließet, den Perpendikel EI, so ist EI = dem Sinus des Winkels ECA, und zugleich = dem Sinus des Bogens EA, weil ersterer Winkel durch diesen Bogen nach §. 29 gemessen wird.

Hätte man aber aus dem Punct E auf die Linie FC, welche auch = Radio, den Perpendikel EM gefället, so wäre aus ersterem Grunde EM = dem Sinus sowohl des Bogens EF als auch des Winkels ECF.

§. 236. Cosinus ist das Complement oder die Ergänzung eines jeden Winkels oder Sinus zum rechten Winkel. Es ist also Fig. 135

EM = Cosinus des Winkels ECA, und
EI = Cosinus des Winkels ECF.

Denn, da der Bogen AF = einem Quadranten, so muß auch der Winkel FCA = Recto seyn. Es ist aber FCA = FCE + ECA, folglich FCE + ECA auch = Recto.

Da nun EM = Cos. des Winkels ECA, und
EI = Cos. des Winkels ECF
so ist auch EM = Complem. des Winkels ECA
zum Recto
und EI = Complem. des Winkels ECF
zum Recto.

§. 237. Das durch die Sinus und Radii entstandene Viereck EICM Fig. 135 ist = Rectangulo, weil Fig. 135.
EIC = EMC = Recto, und dahero EM = IC
und EI = CM §. 18.
Da nun EI = Cos. von ECF, und EM = Cos. von ECA nach §. 236.
so ist auch CM = Cos. von ECF und IC = Cos. von ECA.
Ferner weil nach §. 235
EI = Sin. von ECA und EM = Sin. von ECF
so ist auch
CM = Sin. von ECA, und IC = Sin. von ECF.
Wenn also
EI = Sin. von ECA, so ist IC = Cos. von ECA.
Ist aber
IC = Sin. von ECA, so ist EI = Cos. von ECA.

§. 238. Durch die Diagonale EC ist das Fig. Rectangel EICM Fig. 135 nach §. 52 in zween 135. kongruente rechtwinkligte Triangel EMC und EIC getheilet.

Da nun in selbigem nach §. 237 IC = EM, EI = CM, und EC = EC = der Hypothenuse nach §. 17 und zugleich nach §. 20 = Radio, die IC aber sowohl wie EI nach §. 237 als Sinus

oder Cosinus betrachtet werden kann, so folget, daß in einem jeden rechtwinkligten Dreyeck, wenn dessen Hypothenuse als Radius eines Cirkels angenommen, die beyden Catheti auch als Sinus und Cosinus betrachtet werden können.

§. 239. **Sinus versus** z. E des Winkels ECA Fig. 135 ist das durch den Perpendikel EI von dem Radio AC abgeschnittene Stück AI, und der **Sinus versus** des Winkels ECF ist das durch den Perpendikel EM von dem Radio FC abgeschnittene Stück FM. Man nennet selbigen auch wohl **Queersinus**, **Sagitta** oder **Pfeil** des Winkels ECA.

§. 240. Ein jeder **Sinus** ist die Hälfte einer Chorde von einem noch einmal so großen Bogen, als der Bogen ist, zu welchem der Sinus gehört, oder ein jeder **Sinus** ist die halbe Chorde eines doppelt so großen Bogens. Da also Fig. 135 EI = **Sin.** des Bogens AE, und der Winkel EIC = Recto, ferner CD = CE = Radio, so ist der in gerader Linie bis an die Peripherie verlängerte **Sinus** EI also ED = der Chorde des Bogens EAD. Da nun EAD durch den Diameter AB in zween gleiche Theile getheilet wird, folglich nach §. 39 AE = AD und EI = ID, so ist

Fig. 135.

Sin. EI = Chorde des Bog. $\frac{EAD}{2}$ und **Sin.** ID = Chorde des Bog. $\frac{EAD}{2}$.

§. 241. Ein Quadrant ist = R = 90° nach §. 26. Da nun Fig. 136 BCA = Quadrant = Recto, so muß dessen Sinus BC = Radio seyn, weil nur ein Perpendikel sich aus dem Punct B auf den Diameter AH fällen lässet. Fig. 136.

Der größeste Sinus eines Quadranten ist also = 90° = Recto. Man nennet selbigen dahero Sinus totus, und zeiget ihn öfters durch r an, weil er = Radio.

Alle übrige in einem Quadranten verzeichnete Winkel sind kleiner als 90°, und können als Brüche vom Sinu toto betrachtet werden.

Je weiter die Sinus dieser Winkel vom Radio oder Sinu toto im Quadranten entfernet sind, desto kleiner werden selbige, weil mit denen Winkeln zugleich die Bogen, die sie messen, abnehmen. Da nun alle Sinus nach §. 240 die halbe Chorden eines doppelt so großen Bogens sind, so müssen auch die Sinus mit den Winkeln abnehmen, und auch mit selbigen wachsen. Es ist also z. E. Sin. FG > als Sin. DE, und Sin. DE > als Sin. BC ꝛc.

Der Wachsthum der Sinus gehet von 0 an, wenn noch kein Sinus Statt findet, folglich kein Winkel vorhanden, und währet bis 90°, oder wenn der Sinus = Sinui toto = Radio.

§. 242. Wenn die Sinus wachsen, so nehmen die Cosinus ab; nehmen erstere ab, so werden letztere größer.

Wird der Sinus also r = Radio, so ist dessen Cosinus = 0.

Wird aber der Sinus = o, so ist dessen Cosinus = r = Radio.

Der Beweis hievon beruhet auf der Gewißheit, daß der Cosinus nach §. 236 das Complement eines ihm zugehörigen Sinus zu einem Recto oder 90° ist. Wenn also der Sinus = 90°, so ist ihm keine Ergänzung oder Complement mehr nöthig.

§. 243. Wenn die Sinus wachsen, so werden auch ihre Sinus versi größer. Ist also der Sinus = r = Radio, so ist auch dessen Sinus versus = r = Radio.

§. 244. Wachsen die Winkel über 90°, so nehmen die Sinus derselben wieder ab, und werden = o, sobald die Winkel = 180° = 2.r.

Hingegen die Cosinus sowohl als Sinus versi wachsen mit denen Winkeln zugleich, und wenn der Sinus = o, so wird dessen Cosinus = r, und dessen Sinus versus = 2.r.

§. 245. Werden die Winkel kleiner als 90°, so werden zugleich die Sinus und Sinus versi kleiner, und beyde zugleich = o, wenn der Cosinus = r.

§. 246. Alle Winkel, welche einander zu 180°, oder zu 2 R. ergänzen, haben einerley Sinum. Wäre also, z. E. Fig. 135 EI = Sin. eines Winkels von 60°, so würde eben diese EI auch = Sin. eines Winkels von 120°, weil 120° + 60° = 180°.

Fig. 135.

Sind also die Sinus von ō bis 90° bekannt, so kann man hiedurch die Sinus aller Winkel von

von 0° bis 180° bestimmen, weil man nur nöthig hat, wenn der Sinus eines stumpfen Winkels verlangt wird, den Sinus seines spitzen Nebenwinkels für selbigen zu nehmen, indem niemals zween spitze, sondern allemal ein spitzer und ein stumpfer oder zween rechte Winkel = 180°.

§. 247. Alle Winkel, welche einander zu 180° ergänzen, haben einerley Cosinum.

Es ist also z. E. der Cosinus eines stumpfen Winkels von 150° = dem Cosinus eines spitzen Winkels von 30°, weil dieser erstern zu 180° ergänzet. Die Cosinus aller stumpfen Winkel von 90° bis 180° sind aber, weil selbige sich auf der andern Seite des Diameters befinden, in Ansehung ihrer Lage negativ, und werden dahero mit — bezeichnet.

Wäre also z. E. Fig. 135 Fig. 135.
IC = Cos. von 30° und CO = Cos. von 150°, so ist zwar IC = CO; aber CO wäre = — Cos. CO, also der Cosinus von 150° wäre = — Cos. 30°.

§. 248. Tangente eines Winkels oder Bogens ist eine gerade Linie, welche einen Cirkel in dem Punct berühret, wo der Bogen, welcher den Winkel misset, seinen Anfang nimmt, auf dem Radius senkrecht stehet, und von einem andern verlängerten Radio durchschnitten wird. Es ist also Fig. 135 Fig.
AH = Tang. des Bogens AE, oder des Win. 135.
kels ECA. Denn es ist

1) AE = dem Bogen, welcher den Winkel ECA misset.

2) A = dem Anfangspunct des Bogens AE.

3) AC = Radio, und auf diesem stehet die AH senkrecht, weil nach §. 106 der Winkel HAC = Recto.

4) EC nach §. 20 = Radio und durchschneidet verlängert in H die AH. Es ist also auch der hiedurch entstandene Triang. HAC = Triang. rectangulo.

Wird also in einem jeden rechtwinkligten Triangel einer dessen Cathetorum z. E. Fig. 135 AH oder AC, als Radius eines Cirkels angenommen, so kann man den andern Cathetum als Tangens betrachten.

§. 249. Secante ist der verlängerte Radius, welcher einen Tangenten schneidet. Es ist
Fig. 135. also Fig. 135 HC = Sec. des Bogens AE oder des Winkels ECA. Weil nun nach vorhergehendem Paragrapho Triang. HAC = Triang. Rectangulo, und in selbigem HC = Hypothenusa nach §. 17, so folget, daß in jedem Triang. Rectangulo die Hypothenusa als Secans angenommen werden kann.

§. 250. Corangente ist eine auf den Radium, welcher = dem Schenkel des Complements eines Winkels zu 90°, gefälleter Tangens. Cosecans ist der verlängerte Radius, welcher durch die Cotangente abgeschnitten wird.
Fig. 135. Da also Fig. 135 ECF = Complem. des Winkels

fels ECA und AH = Tang. die CH = Sec. des Bogens AE, so ist FG = Cotang. und CG = Cosec. des Bogens AE.

Wäre hingegen FG = Tang. und CG = Sec. des Bogens EF, so ist AH = Cot. und CH = Cosec. des Bogens EF.

§. 251. Die Tangenten und Secanten von 0° bis 90° wachsen, wenn die Sinus wachsen; wenn also der Sinus = r = Radio, so wird dessen Tangente und Secante = ∞ = unendlich groß. Die Cotangenten und Cosecanten von 0° bis 90° wachsen, wenn die Sinus kleiner werden. Wird also der Sinus = 0, so wird dessen Cotangente und Cosecante = ∞ = unendlich groß.

§. 252. Aller stumpfen Winkel von 90° bis 180° Tangenten, Cotangenten, Secanten, Cosecanten, sind denen den spitzen Winkeln, welche sie zu 180° ergänzen, eigenen völlig gleich, nur haben sie gegen die denen spitzen Winkeln zugehörigen eine entgegengesetzte Lage, sie werden also auch, wie bey denen Cosinus §. 247 gelehret, negativ, und dahero auch mit — bezeichnet.

Der Beweis hievon ist in dem größern Werk weitläuftig ausgeführet.

Das zweyte Kapitel.

Von der Erfindung und Berechnung der trigonometrischen Linien, nebst dem Gebrauch der Tafeln.

§. 253. **Die Erfindung der erklärten trigonometrischen Linien bestehet in der Bestimmung ihrer Größe nach einer angenommenen Maaße.**

Schon vorlängst ist diese Bestimmung von verschiedenen Männern auf eine mühsame Art verrichtet.

Es würde wider die Absicht dieser Schrift seyn, auch nur einige Beyspiele von dieser mühsamen Ausarbeitung anzuführen. Wir bemerken nur, daß sie zu der Bestimmung der Maaße den Radium eines Cirkels erwählten, welchen einige in 1000 Billionen Theile getheilet, annahmen.

Die Schriften, in welchen diese berechnete Linien stehen, werden **trigonometrische Tafeln** genennet.

Man hat viele Ausgaben derselben. Zum gewöhnlichen Gebrauch ist die von **Adrian Vlacq** bekannt gemachte kleine Ausgabe, bey welcher zugleich die Logarithmen der natürlichen Zahlzeichen von 1 bis 10000 befindlich, und wovon bereits in der Arithmetik Erwähnung geschehen, hinreichend.

Es befinden sich in selbiger auf jeder Seiten

der

der trigonometrischen Tafeln die Sinus, Tangenten, Secanten von allen Minuten eines halben Grades nach einem zu 1000000000 Theilen angenommenen Radio berechnet, wovon aber nur 10000000 angegeben, und die übrigen letztern Zahlen weggelassen.

Die Sinus versi sind nicht berechnet, weil selbige wenig gebraucht werden, und im erforderten Fall leicht zu bestimmen, indem sie für die Winkel des Quadranten allezeit r — Cos. sind.

Eine jede Seite ist der Länge herunter in fünf Spalten getheilet.

In der ersten sind die Sinus.
In der zwoten sind die Tangenten.
In der dritten sind die Secanten.
In der vierten sind die Logarithmen der Sinus.
In der fünften sind die Logarithmen der Tangenten enthalten.

Die Logarithmen der Secanten sind weggelassen, weil man selbige zu jetziger Zeit bey trigonometrischen Berechnungen fast gar nicht gebraucht.

In der Länge herunter findet sich von 3 zu 3 Minuten ein Queerstrich, um dadurch die Irrung im Aufsuchen und Abschreiben der trigonometrischen Linien um so mehr zu verhüten.

Auf jeder gegenüber stehenden Seite befinden sich die Cosinus, Corangenten, Cosecanten zu denen jetzt beschriebenen Sinus, und aus diesem Grunde muß man die Minuten der einen Seite von oben herunter, hingegen auf der gegenüber stehenden Seite von unten herauf suchen.

§. 254. Mit jetzt erklärten Verstehen der logarithmischen Linien, oder mit den wirklichen Sinussen, Tangenten, Secanten, Cosinussen, Cotangenten und Cosecanten kann man rechnen, und es muß auch oft geschehen. Man bedienet sich aber am häufigsten derer dabey befindlichen Logarithmen, weil man hiedurch jene beschwerliche und weitläuftige Multiplication und Division durch eine Addition und Subtraction verrichten kann.

Die Erfindung dieser Logarithmen ist auf eben die in der Arithmetik bey denen Logarithmen der natürlichen Zahlzeichen gelehrte Art geschehen. Sie sind insgesammt für den Sinum totum zu 10000000000 berechnet, obgleich, wie §. 253 erwähnet, nur 10000000 angegeben. Die Characteristic ist dahero auch = 10 gesetzet, welche sonst zu groß seyn würde.

In der Berechnung, welche bloß mit diesen Logarithmen verrichtet wird, hindert selbiges aber nichts, denn je größer der Sinus totus angenommen worden, desto besser es ist; man muß aber nur die Vorsicht gebrauchen, diese Logarithmen nicht als Logarithmen der neben ihnen stehenden Zahlen anzusehen, und auf diese Art gebrauchen, indem sie, wie aus dem vorhergehenden erhellet, wirklich Logarithmen weit größerer Zahlen sind. So ist z. E. der Logarithmus des Sinus totus oder Radius, der hier 10,0000000, ist nicht der Logarithmus von 10000000, als wofür der natürliche Sinus totus in denen Tafeln angenommen wird,

denn

denn alsdenn müste er nur 7,0000000 seyn, sondern er ist der Logarithme von 10000000000.

§. 255. Unter allen in denen trigonometrischen Tafeln berechneten Linien sind nur folgende drey streng wahr, als

1) Sinus totus, 2) Sinus von 30 Grad, 3) Tangens von 45 Grad.

Ersterer, weil selbiger = Radio, der zu einer gewissen Größe angenommen.

Der zweyte, weil selbiger = $\frac{r}{2}$ = halben Radio.

Der dritte, weil selbiger = r = Radio.

Wegen des Beweises beziehen wir uns auf das größere Werk.

Alle übrige trigonometrische Linien sind nur durch Näherung gefunden, und sind also nach dem angenommenen System Irrationalgrößen. Ihre Abweichung von der wahren Größe beträgt aber auch nur in den kleinen Tafeln noch kein $\frac{1}{10000000}$ Theil des Radii. Man kann daher auch selbige für wahr annehmen.

§. 256. Diese berechnete trigonometrische Linien sind für einen jeden Cirkel passend, es mag dessen Radius noch so groß oder klein seyn. Der Beweis beruhet auf der Gewißheit, daß bey gleich großen Winkeln, sie mögen stumpf oder spitz seyn, in Cirkeln von verschiedenen Radiis sich die Sinus, Cosinus u. s. w. gegen die ihnen gleichnamigte verhalten, wie die Radii der

Fig. 137. ihnen zugehörigen Cirkel. Weil also Fig. 137 der Winkel ECA = dem Winkel eCa, so werden

Sin. FE : sin. fe = Rad. AC : rad. aC
Tang. AD : tang. ad = Rad. AC : rad. aC
Sec. CD : sec. Cd = Rad. AC : rad. aC.

Der Beweis hievon ist folgender:

1) Beyden Cirkeln AHB und ahb ist das Centrum C gemeinschaftlich, und man kann sich zween oder mehrere Cirkel von ungleichen Radiis nach §. 24 in einander gelegt gedenken.

2) Da der Winkel DCA = ECF = gCa = eCf

3) da der Winkel DAC = EFC = gaC = efC = Recto; so ist

4) Triang. eCf ≅ Triang. ECF und Triang. DCA ≅ Triang dCa.

Man kann also schließen

EF : ef = CA : Ca, DA : da = CA : Ca,
CD : Cd = CA : Ca u. s. w.

§. 257. Der Gebrauch dieser berechneten Tafeln erfordert also allein eine Kenntniß des Radii des gegebenen Cirkels. Wenn dieser bekannt, so kann man sehr leicht durch die Proportionsregel mit Beyhülfe der trigonometrischen Tafeln die verlangten trigonometrischen Linien für jeden Cirkel finden.

Allgemein werden die trigonometrischen Linien eines jeden Winkels durch folgende Formeln, in welchen a = dem gegebenen Winkel, r = Radio, ausgedrückt, als

1) $\text{Sin. } a = \sqrt{(r^2 - \text{Cos. } a^2)}$
2) $\text{Cos. } a = \sqrt{(r^2 - \text{Sin. } a^2)}$

3)

3) $\text{Tang. } a = \frac{r \cdot \text{Sin. } a}{\text{Cos. } a}$

4) $\text{Cot. } a = \frac{r^2}{\text{tang. } a}$

5) $\text{Sec. } a = \frac{r^2}{\text{cos. } a}$ oder auch $\sqrt{(\text{tang. } a^2 + r^2)}$

6) $\text{Cosec. } a = \frac{r^2}{\text{Sin. } a}$ oder auch $\sqrt{(r^2 + \text{cotang. } a^2)}$.

Wenn aber der Radius des Cirkels = 1 angenommen worden, so ist

1) $\text{Sin. } a = \sqrt{(1 - \text{cos. } a^2)}$
2) $\text{Cos. } a = \sqrt{(1 - \text{Sin. } a^2)}$

3) $\text{Tang. } a = \frac{\text{Sin. } a}{\text{Cos. } a}$

4) $\text{Cot. } a = \frac{1}{\text{tang. } a}$

5) $\text{Sec. } a = \frac{1}{\text{cos. } a}$

6) $\text{Cosec. } a = \frac{1}{\text{sin. } a.}$

Das dritte Kapitel.

Die Berechnung der Seiten und Winkel der geradlinigten Dreyecke.

§. 258. Die Berechnung der Seiten und Winkel aller geradlinigten Dreyecke gründet sich vorzüglich auf den allgemeinen Satz, daß in einem jeden geradlinigten Dreyeck, es mag rechtwinkligt, spitzwinkligt, stumpfwinkligt, gleichseitig oder ungleichseitig seyn, sich die Seiten gegen einander verhalten, wie die Sinus der denen Seiten gegenüber stehenden Winkel, oder auch umgekehrt. Die Sinus der Winkel verhalten sich gegen einander, wie die diesen Winkeln gegenüber stehende Seiten. Z. E. in Fig. 138 AB : Sin. D = AD : Sin. B, oder AB : AD = Sin. D : Sin. B, oder Sin. D : AB = Sin. B : AD, oder Sin. D : Sin. B = AB : AD.

Fig. 138.

Der Beweis hievon ist folgender:

Der Winkel D = $\frac{1}{2}$ Bogen AB und der Winkel B = $\frac{1}{2}$ Bogen AD, beydes nach §. 109, folglich ist Sin. des Winkels D = Sin. $\frac{1}{2}$ Bogen AB, und Sin. des Winkels B = Sin. $\frac{1}{2}$ Bogen AD. Es ist aber auch nach §. 240

$\frac{1}{2}$ Chorde AB = Sin. $\frac{1}{2}$ Bogen AB und $\frac{1}{2}$ Chorde AD = Sin. $\frac{1}{2}$ Bogen AD, also $\frac{1}{2}$ Chorde AB = Sin. des Wink. D, und $\frac{1}{2}$ Chorde AD = Sen. des Wink. B.

Da

Da nun Sin. D : Sin. B = ½ Chorde AB : ½ Chorde AD, oder auch wenn beyde ½ Chorden durch 2 multipliciret, Sin. D : Sin. B = Chorde AB : Chorde AD, so verhält sich AB : Sin. D = AD : Sin. B.

§. 259. Eben jetzt geführter Beweis gilt auch sowohl für die übrigen Winkel und Seiten in dem angenommenen spitzwinkligten Dreyeck ABD, als auch in jedem stumpfwinkligten Dreyeck. Z. E. in dem Triang. obtusang. BDA Fig. 139. Fig. 139

Man verlängere nur die Grundlinie AD, an welcher der stumpfe Winkel ADB liegt, in gerader Linie nach E, und fälle auf selbige in E aus B den Perpendikel BE, so wird Triang. BEA = Triang. rectang., in welchem, wenn AB als Radius eines Cirkels angenommen, dessen Centrum A, die BE = Sin. des Winkels A nach §. 238.

Man kann also schließen nach §. 258

1) AB : BE = rad. : Sin. A
2) BE : BD = Sin. D : Sin. E.

Es ist aber nach §. 246 bekannt, daß der Sinus sowohl des spitzen als stumpfen Winkels, die einander zu 180° ergänzen, von gleicher Größe, also ist auch hier die BE sowohl der Sinus des spitzen Winkels BDE als des stumpfen Winkels BDA. Da nun ferner Sinus E = Recto = r, so kann man auch schließen

BE : BD = Sin. D : rad.

Es ist aber auch AB : BE = rad. : Sin. A, folglich AB : BD = Sin. D : Sin. A.

§. 260. Bey der Auflösung aller geradlinigten, rechtwinkligten, gleichschenkligten und schiefwinkligten Dreyecke werden entweder zwo Seiten, eine Seite und zween Winkel, oder alle 3 Winkel gesucht.

Werden zwo Seiten gesucht, so müssen eine Seite und zween Winkel gegeben seyn.

Diese Winkel müssen beyde an der gegebenen Seite liegen. Liegt aber auch nur einer davon an der gegebenen Seite, so lässet sich der andere fehlende leicht bestimmen, weil selbiger = der Differenz, welche zwischen der Summe beyder gegebenen Winkel und 180° befindlich.

Werden eine Seite und zween Winkel gesucht, so müssen zwo Seiten und ein Winkel bekannt seyn.

Dieser gegebene Winkel ist alsdenn entweder von beyden gegebenen Seiten eingeschlossen, oder einer gegebenen Seite entgegen gesetzet.

Werden alle drey Winkel gesucht, so müssen alle drey Seiten bekannt seyn.

Dieses sind alle Vorfälle, welche bey der Berechnung der Seiten und Winkel aller Dreyecke möglich.

§. 261. Von der Berechnung der Linien und Winkel rechtwinkligter Triangel.

Erste Aufgabe.

Fig. 140. In dem Triang. rectang. ABC Fig. 140 sey gegeben die Hypothenuse AB und der Winkel ABC. Man sucht die Länge AC.

Auf-

Auflösung.

Weil der Winkel ABC = Recto, so sind hier zween Winkel und eine Seite, also die erforderlichen drey Sätze bekannt.

Betrachtet man die Hypothenusa AB als Radium eines Cirkels, dessen Centrum in B, so ist AC = Sinus des Winkels ABC. Da nun AB : AC = rad. : Sin. ABC oder rad. : Sin. ABC = AB : AC, so ist

$$\frac{AB \cdot \text{Sin. } ABC}{\text{rad.}} = AC.$$

Wenn nun AB = 459 Fuß, der Winkel ABC = 50 Grad, so ist

$$AC = \frac{AB \cdot \text{Sin. } ABC}{\text{rad.}} = \frac{459 \cdot \text{Sin. } 50^{\circ}}{\text{Sin. tot.}}$$ oder logarithmisch berechnet AC = l. 459 + l. Sin. 50° — l. Sin. tot. = 2,6618127 + 9,8842540 — 10,0000000 = 2,5460667.

Diese Logarithmen unter denen natürlichen Zahlzeichen in denen Tafeln aufgesucht, giebt 351,6 = 35 R. 1 Fuß 6 Zoll für die Länge der Linie AC.

Zwote Aufgabe.

In dem Triang. rectang. ABC Fig. 140 sey die Hypothenusa AB = Radio = 459 Fuß, der Winkel ABC = 50 Grad. Man sucht die Länge der Linie BC. Fig. 140.

Auflösung.

Da AB = Radio, so ist, wenn AC = Sin. des Winkels ABC, die BC = Cos. des Winkels ABC.

Es ist aber hier Sin. ABC = 50, folglich Cos. ABC = 90 — 50 = 40. Da nun rad.: Cos ABC = AB:BC, oder Sin. tot.: Sin. 40 = 459:BC, so ist $\frac{\text{Cos. ABC . AB}}{\text{rad.}} = BC$, oder $\frac{\text{Sin. 40 . 459}}{\text{Sin. tot.}} = BC$, und logarithmisch berechnet wäre l. BC = l. Sin. 40 + l. 459 — l. Sin. tot. = 9,8080675 + 2,6618127 — 10,0000000 = 12,4698802 — 10,0000000 = 2,4698802; diesen Logarithmen unter denen natürlichen Zahlzeichen aufgesucht, giebt 295 Fuß für die Länge der BC.

Dritte Aufgabe.

Fig. 140. In dem Triang. rectang. ABC Fig. 140 sey einer der beyden Cathetorum, z. E. BC = 295 Fuß und der Winkel ABC = 50 gegeben; man sucht den Cathetum AC

Auflösung.

Nimmt man hier BC als Radium an, so kann man AC als Tangens des Winkels ABC betrachten, also wird

rad.: Tang. ABC = BC:AC, und daher

$AC = \frac{\text{Tang. ABC . BC}}{\text{rad.}}$, oder l. AC = l. Tang. ABC + l. BC — l. Sin. tot., also hier l. AC = l. Tang. 50 + l. 295 — l. 10,0000000 = 10,0761865 + 2,4698220 — 10,0000000 = 12,5460085 — 10,0000000 = 2,5460085. Dieser Logarithme ist in denen Tafeln aufgesucht = der Zahl 351,6 = der Länge AC.

Nimmt

Nimmt man aber AB als Radium an, so ist AC = Sin. und BC = Cos. des Winkels ABC, und es wäre alsdenn

Cos. ABC : Sin. ABC = BC : AC, und dahero

$$AC = \frac{\text{Sin. ABC} \cdot BC}{\text{Cos. ABC}},$$ oder l. AC = l. Sin. ABC + l. BC − l. Cos. ABC.

Vierte Aufgabe.

In dem Triang. rectang. ABC Fig. 140 sey einer der beyden Cathetorum, z. E. BC = 295 Fuß, und der Winkel ABC = 5° gegeben; man sucht die Hypothenusa AB. Fig. 140.

Auflösung.

Nimmt man hier AB als den Radium, AC als den Sinum, BC als den Cosinum des Winkels ABC an, so ist

Cos. ABC : rad. = BC : AB, daher also

$$AB = \frac{\text{rad. BC}}{\text{Cos. ABC}},$$ oder l. AB = l. rad. + l. BC − l. Cos. ABC,

also in vorher angenommener Maaße l. AB = l. 295 + l. Sin. tot. − l. Sin. 4° = 2,4698220 + 10,0000000 − 9,8080675 = 12,4698220 − 9,8080675 = 2,6617545 = l. der Länge von 459 Fuß.

Nimmt man aber BC als Radium an, so kann man AB als Secanten des Winkels ABC betrachten, und ist alsdenn

rad. : Sec. ABC = BC : AB, daher denn

$$AB = \frac{\text{Sec. ABC} \cdot BC}{\text{Sin. tot.}}, \text{ oder l. } AB = \text{l. Sec.}$$

$$ABC + \text{l. } BC - \text{l. Sin. tot.}$$

Weil aber in denen wenigsten Tafeln die Logarithmen für die Secanten berechnet, und man auch ohne diese, wie eben gezeigt, die AB finden kann, so ziehet man erstere gezeigte Art der letztern vor.

Fünfte Aufgabe.

In dem Triang. rectang. ABC Fig. 140 sey gegeben der Cathetus AC, der Winkel ABC. Man sucht den Cathetum BC.

Auflösung.

Fig. 140. Da AC = Sin. des Winkels ABC, so ist CB = Cos. des Winkels ABC, folglich

Sin. ABC : Cos. ABC = AC : BC, also

$$BC = \frac{\text{Cos. ABC} \cdot AC}{\text{Sin. ABC}}.$$

Nimmt man aber AC als Radium an, so ist BC = Cotang. des Winkels ABC, also

Sin. tot. : Cotang. ABC = AC : BC, folglich

$$BC = \frac{\text{Cotang. ABC} \cdot AC}{\text{Sin. tot.}}.$$

Sechste Aufgabe.

Fig. 140. In dem Triang. rectang. ABC Fig. 140 sey gegeben der Cathetus AC, der Winkel ABC. Man sucht die Hypothenusa AB.

Auf-

Auflösung.

Da hier Sin. ABC : Sin. tot. = AC : AB,

so ist $AB = \frac{\text{Sin. tot.} \cdot AC}{\text{Sin. ABC}}$.

Siebende Aufgabe.

In dem Triang. rectang. ABC Fig. 140 sey gegeben entweder AC und CB, man sucht AB; oder es sey AB und AC bekannt, man sucht BC; oder es sey AB und BC bekannt, man sucht AC.

Auflösung.

Bey allen dreyen Vorfällen konnte man die unbekannte Größe trigonometrisch finden, weil jedesmal zwo Seiten und ein Winkel, welcher hier = Recto, bekannt. Man sucht aber gewöhnlich hier die fehlende Seite durch Hülfe des pythagorischen Problems, und nach selbigem wird

$AB = \sqrt{(ACq + BCq)}$

$BC = \sqrt{(ABq - ACq)}$

$AC = \sqrt{(ABq - BCq)}$

Da nun nach vorher angenommener und gefundener Maaße AB = 459 Fuß, BC = 295 Fuß, AC = 351,6 Fuß, so wird

$AB = \sqrt{(ACq + BCq)} = \sqrt{(351{,}6^2 + 295^2)}$
$= \sqrt{(123622{,}56 + 87025)} = \sqrt{210647{,}56}$
$= 458{,}9635\ldots$

$BC = \sqrt{(ABq - ACq)} = \sqrt{(459^2 - 351{,}6^2)}$
$= \sqrt{(210681 - 123622{,}56)} = \sqrt{87058{,}44}$
$= 295.$

$AC = \sqrt{(ABq - BCq)} = \sqrt{(459^2 - 295^2)}$
$= \sqrt{(210681 - 87025)} = \sqrt{123656} = 351{,}6.$

Achte Aufgabe.

Fig. 140. In dem Triang. rectang. ABC Fig. 140 sind alle drey Seiten bekannt. Man sucht die schiefen Winkel ABC und BAC.

Auflösung.

Hier hat man nur nöthig, einen Winkel zu suchen, weil der Winkel ACB = Recto, also bereits bekannt ist, und der andere noch fehlende alsdenn = der Differenz zwischen dem gefundenen und 90 Grad. Wenn nun z. E.

$$\text{Sin. ABC} = \frac{\text{Sin. tot. AC}}{\text{AB}},$$ so ist Sin. BAC

= Sin. tot. — Sin. ABC, oder da

$$\text{Sin. BAC} = \frac{\text{Sin. tot. BC}}{\text{AB}},$$ so ist Sin. ABC

= Sin. tot. — Sin. BAC.

Wenn nun AB = 459 Fuß, BC = 295 Fuß, AC = 351,6 Fuß, so ist

1) Sin. ABC = l. 351,6 + l. Sin. tot — l. 459 = 2,5460489 + 10,0000000 — 2,6618127 = 12,5460489 — 2,6618127 = 9,8842362 = l. Sin. 50°, folglich

Sin. BAC = 90° — 50° = 40°.

2) Sin. BAC = l. 295 + l. Sin. tot. — l. 459 = 2,4698220 + 10,0000000 — 2,6618127 = 12,4698220 — 26618127 = 9,8080093 = l. Sin. 40°, folglich

Sin. ABC = 90° — 40° = 50°.

Alle bisher angeführte und aufgelöfete Aufgaben enthalten alle bey rechtwinkligten Dreyecken vorkommende Fälle.

§. 262.

§. 262. Von der Berechnung der Seiten und Winkel der spitzwinkligten Triangel.

Die spitzwinkligten Triangel sind entweder gleichseitig, gleichschenkligt oder ungleichseitig.

Die gleichseitigen Triangel bestehen nach §. 16 aus drey gleich großen Seiten, und ein jeder in selbigen vorhandenen Winkel ist dahero nach §. 56 allemal $= \frac{1}{3}2 = 60°$. Wenn also in einem gleichseitigen Triangel nur eine Seite bekannt, so sind sie alle drey bekannt.

Die gleichschenkligten Triangel bestehen nach §. 16 aus zwo gleich großen Seiten, und die an selbigen befindliche Winkel sind auch nach §. 44 von gleicher Größe, weil selbige gleichen Linien entgegen stehen.

Wenn also nur ein Winkel in einem gleichschenkligten Triangel gegeben, so lassen sich die übrigen beyden Winkel leicht bestimmen. Es sey z. E. in dem Triang. aequicrur. CAB Fig. 141 der Winkel ACB bekannt, und $= u$. Fig. 141.

Da nun hier $AC = BC$, also nach §. 44 der Winkel $CAB =$ dem Winkel CBA; ferner nach §. 56

Winkel $ACB + CAB + CBA = 2R = 180°$

so ist $180° - ACB = 180° - u = CAB + CBA$

oder $180° - u = 2\,CAB$ oder $180° - u = 2\,CBA$

also $\frac{180°}{2} - u = CAB$ oder $\frac{180°}{2} - u = CBA$.

Wenn aber CAB oder CBA bekannt, und man nennet einen dieser Winkel e, so ist $u = 180° - 2e$.

Ein jeder gleichschenkligter Triangel wird durch einen aus der Spitze desselben, z. E. aus C Fig. 141, auf die Grundlinie AB gefälleten Perpendikel, nach §. 41, in zween kongruente rechtwinkligte Triangel getheilet. Es ist also Fig. 141 Triang. CDA $\cong$ Triang. CDB, und dahero auch $AC = CB$, $AD = DB$, $CD = CD$, ferner $CDA = CDB = Recto$, $CAD = CBD$, $ACD = BCD = \frac{1}{2}u$.

Hieraus folget also, daß

1) $AC : AD = Sin.\ tot. : Sin.\ \frac{1}{2}u$

oder wenn $AC = CB = a$, $AB = b$, also $AD = \frac{1}{2}b$, $Sin.\ tot. = rad.$

so ist erwähnte Proportion in Zeichen oder

$AC : AD = Sin.\ tot. : Sin.\ \frac{1}{2}u = a : \frac{1}{2}b = rad. : Sin.\ \frac{1}{2}u$, folglich

$$Sin.\ \frac{1}{2}u = \frac{rad.\ \frac{1}{2}b}{a} = \frac{rad.\ b}{2a}.$$

2) $AD : AC = Sin.\ \frac{1}{2}u : rad.$, oder in Zeichen $\frac{1}{2}b : a = Sin.\ \frac{1}{2}u : rad.$ also

$$a = \frac{\frac{1}{2}b \,.\, rad.}{Sin.\ \frac{1}{2}u} = \frac{b \,.\, rad.}{2\,Sin.\ \frac{1}{2}u}.$$

3) $AC : AD = rad. : Sin.\ \frac{1}{2}u$, oder auch $rad. : Sin.\ \frac{1}{2}u = AC : AD$, also in Zeichen $rad. : Sin.\ \frac{1}{2}u = a : \frac{1}{2}b$, folglich

$$\frac{1}{2}b = \frac{a \,.\, Sin.\ \frac{1}{2}u}{rad.} \text{ also } b = \frac{2a\,Sin.\ \frac{1}{2}u}{rad.}.$$

4) Da $ACB = u$, $DCB = \frac{1}{2}u$, $ADC = CDB = Recto$, so ist $DB = Sin.\ \frac{1}{2}u$, und $CD = Cos.\ \frac{1}{2}u$, und zugleich auch Sin. von CBD, AB

es wird also

AB : CA = Sin. ACB : Sin. CBD, oder in Zeichen
b : a = Sin. u : Cos. $\frac{1}{2}$u, also auch
Cos. $\frac{1}{2}$u : Sin. u = a : b, folglich

$$b = \frac{a \,.\, \text{Sin. } u}{\text{Cos. } \frac{1}{2} u}.$$

5) Wir haben für b nunmehro einen gedoppelten Werth gefunden, denn nach Nr. 3 ist b $= \frac{2a \text{ Sin. } \frac{1}{2} u}{\text{rad.}}$ und nach Nr. 4 ist b $= \frac{a \,.\, \text{Sin. } u}{\text{Cos. } \frac{1}{2} u}$.
Da nun beyde Werthe gleich groß seyn müssen, oder

$$\frac{2a \text{ Sin. } \frac{1}{2} u}{\text{rad.}} = \frac{a \text{ Sin. } u}{\text{Cos. } \frac{1}{2} u}$$

so ist

$$\text{Sin. } u = \frac{2 \text{ Sin. } \frac{1}{2} u \,.\, \text{Cos. } \frac{1}{2} u}{\text{rad.}}.$$

§. 263. Bey der Berechnung der Seiten und Winkel gleichschenkligter Triangel werden wir aber nur folgende Formeln zu gebrauchen nöthig haben, welche wir §. 262 gefunden, als

1) Sin. $\frac{1}{2}$u $= \frac{rb}{2a}$ nach Nr. 1.

2) $a = \frac{rb}{2 \text{ Sin. } \frac{1}{2} u}$ nach Nr. 2.

3) $\frac{1}{2}b = \frac{a \,.\, \text{Sin. } \frac{1}{2} u}{\text{rad.}}$ nach Nr. 3.

Erste Aufgabe.

In dem gleichschenkligten Triangel CAB Fig. 141 sey gegeben die Grundlinie AB = 2°92″, der Winkel ACB = 53°. Fig. 141.

Man suche die Seite AC und BC.

Auf-

Auflösung.

Man hat hier nicht nöthig, die Winkel zu suchen, weil, wenn in einem gleichschenkligten Triangel ein Winkel bekannt, die beyden übrigen auch nach §. 56 bekannt sind.

Da nun nach der gegebenen Formel

$a = \frac{rb}{2 \text{ Sin. } \frac{1}{2} u}$ und hier

$a = AC = BC$, $b = AB = 292''$, Sin. u $= \text{Sin } ACB = 53^{\circ}$

also Sin. $\frac{1}{2}$ u $= ACD = BCD = \frac{53}{2} = 26^{\circ},30'$,

$r =$ Radio $=$ Sin. tot., so ist

$AC = a = \frac{rb}{2 \text{ Sin } \frac{1}{2} u} = \frac{\text{Sin. tot. } 292}{2 . \text{Sin. } 26,30}$, oder

logarithmisch berechnet, wäre l. AC $=$ (l. Sin. tot. $+$ l. 292) $-$ (l. 2 $+$ l. $26^{\circ},30'$) $=$ (10,0000000 $+$ 2,4653828) $-$ (0,30103000 $+$ 9,6495274) $=$ 12,4653828 $-$ 9,9505574 $=$ 2,5148254 $=$ l. der Zahl 327, 2.

Da nun AC bekannt, und AC $=$ BC, so ist auch BC $= 327,2$.

Zwote Aufgabe

In dem gleichschenkligten Triangel CAB Fig. 141 sey AC $= 327,2$, der Winkel CBA $= 63^{\circ},30'$. Man suche die Länge AB.

Auflösung.

Da der Winkel CBA $=$ CAB $= 63^{\circ},30'$, so ist der Winkel ACB $=$ u nach §. 56 $= 180^{\circ} -$ CBA $+$ CAB $= 180^{\circ} - 63^{\circ},30' + 63^{\circ},30 = 180^{\circ} - 127^{\circ} = 53^{\circ}$, also $\frac{1}{2}$ u $= \frac{53}{2} = 26^{\circ},30'$.

Da

Da nun $\frac{AB}{2} = \frac{1}{2}b = \frac{a \cdot \text{Sin. } \frac{1}{2}u}{\text{rad.}}$, so ist hier $\frac{b}{2} = \frac{327{,}2 \cdot \text{Sin. } 26^\circ, 3'}{\text{rad.}}$, oder logarithmisch berechnet.

l. 327,2 + l. Sin. 26°,3′ — l. Sin. tot. = 2,5148254
+ 9,6495274 — 10,0000000 = 12,1643528
— 10,0000000 = 2,1643528 = l. der Zahl 146.

Da nun $\frac{AB}{2} = 146$, so ist AB = 146,2 = 292.

Dritte Aufgabe.

In dem gleichschenkligten Triangel CAB Fig. 141 sey AC = 327,2, also auch BC = 327,2, der Winkel ACB = 53°. Man sucht die Seite AB. Fig. 141.

Auflösung.

Da AB = b, und $b = \frac{2a \text{ Sin. } \frac{1}{2}u}{\text{rad.}}$, hier aber a = AC = BC = 327,2, der Winkel ACB = u = 53°, also $\frac{1}{2}u = 26^\circ, 3'$, so ist b = AB
= l. 2 + l. Sin. 26°,3′ — l. Sin. tot. = 0,3010300
+ 2,5148254 + 9,6445274 — 10,0000000
= 12,4653828 — 10,0000000 = 2,4653828
= l. der Zahl 292.

Vierte Aufgabe.

Zu dem gleichschenkligten Triangel CAB Fig. 141 sind alle drey Seiten gegeben. Man sucht die drey Winkel. Fig. 141.

Auflösung.

Da der Winkel CAB = dem Winkel ABC, so hat man nur nöthig den Winkel ACB zu suchen.

Es ist aber ACB = u. Da nun $\frac{1}{2}u = \frac{rb}{2a}$ und hier b = 292, a = 327,2, so ist

$\frac{1}{2}u = \frac{ACB}{2} = \frac{rb}{2a} = \frac{rad.\ 292}{2.327,2} =$ (l. Sin. tot. + l. 292) − (l. 2 + l. 327,2) = (10,0000000 + 2,4653828) − (0,3010300 + 2,5148133) = 12,4653828 − 2,8158433 = 9,6495395 = l. Sin. 26°,30′.

Da nun $\frac{ACB}{2}$ = 26°,30′, so ist ACB = 26°,30′.2 = 53°, und die Summe der beyden übrigen Winkel ist = 180° − 53° = 127°, also einer, weil sie beyde gleich groß, = $\frac{127}{2}$ = 63°,30′.

§. 264. Von der Berechnung der Seiten und Winkel aller schiefwinkligten Triangel, oder vielmehr von der allgemeinen Auflösung aller geradlinigten Dreyecke, weil auch alle vorher betrachtete sich auf jetzt gezeigte Art auflösen lassen.

Erste Aufgabe.

In dem schiefwinkligten Dreyeck ABC Fig. 142. Fig. 142 sey gegeben AC = 30′, der Winkel CBA = 46°,33′, der Winkel BAC = 28°,57. Man sucht also nur die Seiten BC und AB, denn der dritte Winkel BCA ist = 180 − 46°,33 + 28,57 = 180° − 75°,30′ = 104°,30′.

Auflösung.

1) Weil Sin. CBA : Sin. CAB = AC : BC, so ist $BC = \frac{\text{Sin CAB} . AC}{\text{Sin. CBA}}$, oder nach der angenom-

nommenen Maaße ist BC = l. Sin. 28°,57 + l. 36′ — l. 46°,33′ = 9,6848868 + 1,4771212 — 9,8609215 = 11,1620080 — 9,8609215 = 1,3010865 = l. der Zahl 20′.

2) Weil Sin. CBA : Sin. ACB = AC : AB,

so ist $AB = \frac{\text{Sin. ACB} \cdot \text{AC}}{\text{Sin. CBA}}$ = l. Sin. 104°,30 + l. 36′ — l. Sin. 46°,33′. Da nun nach § 244 der l. Sin. 104°,30 = l. Sin. 75°,30′, so ist l. Sin. 75°,30′ + l. 30 — l. Sin. 46°,33 = 9,9859416 + 1,4771212 — 9,8609215 = 11,4630628 — 98609215 = 1,6021413 = l. der Zahl 40′.

Zwote Aufgabe.

In dem schiefwinkligten Dreyeck ABC Fig. 142 sey AC = 30′, der Winkel BCA = 104°,30′, der Winkel ABC = 46°,33′. Man sucht die Länge AB und BC. Fig. 142.

Auflösung.

Da Sin. CBA : Sin. ACB = AC : AB, und Sin. CBA : Sin. CAB = AC : BC, so wird

$AB = \frac{\text{Sin. ACB} \cdot \text{AC}}{\text{Sin. CBA}}$ = l. Sin. ACB + l. AC — l. Sin. CBA = l. Sin. 104°,30′ + l. 30′ — l. Sin. 46°,33′ = l. Sin. 75°,30′ + l. 30′ — l. Sin. 46°,33′ =, wie ersten, dem l. der Zahl 40′ Und

$BC = \frac{\text{Sin. CAB} \cdot \text{AC}}{\text{Sin. CBA}}$ = l. Sin. 28°,57 + l.

30 — l. Sin. 46°,33′ = gleichfalls, wie in ersterer Auflösung dem l. der Zahl 20.

Dritte Aufgabe.

Fig. 142. In dem schiefwinkligten Dreyeck ABC Fig. 142 sey BC = 20, AB = 40, der Winkel CAB = 28°,57′. Man sucht den Winkel ACB.

Auflösung.

Es ist hier BC : AB = Sin. CAB : Sin. ACB,

also $\text{Sin. ACB} = \frac{\text{AB . Sin. CAB}}{\text{BC}} = \text{l. AB} + \text{l.}$

Sin. CAB — l. BC = l. 40′ + l. Sin. 28°,57′
— l. 20 = 1,6020600 + l. 9,6848868 — 1,3010300
= 11,2869468 — 1,3010300 = 9,9859168
= l. Sin. 75°,30′.

Es ist aber nach §. 246 bekannt, daß der Sinus eines spitzen Winkels zugleich der Sinus eines stumpfen Winkels, welcher von ersterm das Complement zu 180° ist. Da nun in diesem schiefwinkligten Triangel ein stumpfer Winkel vorhanden, so ist die Frage, ob der gefundene Sinus ACB = einem stumpfen oder spitzen Winkel sey. Ist ersteres, so wäre er = 180° — 75°,30′ = 104°,30′; ist letzteres, so ist er = 75°,30′.

Wir haben uns hierüber in dem größern Werke weitläuftig erkläret, gemeiniglich lehren es die Umstände schon, nach welchen also auch hier Sin. ACB = 104°,30′.

Da

Da nun Sin ACB = 104,30', Sin. CAB = 28,57', so ist Sin. CBA = 180 = 104,30' + 28,57 = 180 — 133,27' — 46°,33'.

Man hat also überhaupt in diesem Fall nur einen Winkel zu suchen, weil alsdenn der dritte von selbst bekannt ist.

Vierte Aufgabe.

In dem schiefwinkligten Triangel ABC Fig. 142 seyn gegeben die Seiten AB und AC, ingleichen der von diesen zwo Seiten eingeschlossene Winkel CAB. Man sucht die beyden unbekannten Winkel CBA und BCA. Fig. 142.

Auflösung.

Die Auflösung dieser Aufgabe gründet sich auf folgende zween Sätze.

1) Wenn die Summa zwoer Größen $x + y = S$, beyder Größen Differenz $= d$, und y größer als x, so ist die kleinste dieser Größen oder $x = \frac{S-d}{2}$, und y oder die größeste $= \frac{S+d}{2}$.

2) In dem Dreyeck verhält sich die Summa zwoer gegebenen Seiten zu ihrer Differenz, wie die Tangente der halben Summa ihrer beyden gegenüber stehenden Winkel zu der Tangente ihrer halben Differenz.

Ersterer Satz ist in dem größern Lehrbuche der Arithmetik §. 400, und letzterer in der Geometrie §. 515 weitläuftig bewiesen. Es

wird nun nicht schwer fallen, die beyden fehlenden Winkel zu bestimmen, denn es wird nun folgender Satz wahr seyn.

$$AC+AB:AC-AB=\frac{\text{Tang. }B+C}{2}:\frac{\text{Tang. }B-C}{2}.$$

Da uns AC und AB gegeben ist, so wissen wir die beyden ersten Glieder der Proportion; da uns auch der Winkel CAB bekannt, so wissen wir auch die Summe der beyden übrigen Winkel. Wir können also auch nicht nur hieraus den **Tangens** der halben Summe, sondern auch den **Tangens** der halben Differenz, welches hier das 4te Glied der **Proportion** ist, finden. Haben wir nun diesen Winkel gefunden, und addiren selbigen zu der halben Summe beyder Winkel, so haben wir den größesten von beyden Winkeln. Ziehen wir aber diesen gefundenen Winkel von der halben Summe ab, so haben wir den kleinsten von beyden Winkeln.

Z. E. wenn AB = 50, AC = 60, der Winkel CAB = 30°, so ist

$AC+AB=60+50=110$

$AC-AB=60-50=10.$

Die beyden Winkel CBA + BCA = 180° − 30° = 150°.

Man kann also schließen:

$$110:10=\frac{\text{tang. }150°}{2}:\frac{\text{tang. }B-C}{2}$$

aber

aber $\frac{\text{Tang. } 150^\circ}{2} = \text{Tang. } 75^\circ$, also

$110 : 10 = \text{Tang. } 75^\circ : \frac{\text{Tang. B—C}}{2}$, und

$\frac{\text{Tang. B—C}}{2}$ wäre $=$ l. 10 $+$ l. Tang. 75° — l. 110

$= 1{,}0000000 + 10{,}5719475 - 2{,}0413927$

$= 11{,}5719475 - 2{,}0413927 = 9{,}5305548$

$=$ l. Tang. $18^\circ{,}44'$.

Diesen Winkel zu der halben Summe, welche $= 75^\circ$, addiret, ist $= 18^\circ{,}44' + 75^\circ = 93^\circ{,}44'$ $=$ dem großen Winkel.

Hingegen diesen Winkel von der halben Summe $= 75$ abgezogen, ist $= 75^\circ - 18^\circ{,}44' = 56^\circ{,}16'$ $=$ dem kleinen Winkel.

Man kann nun sehr leicht die fehlende Seite BC finden. Denn da Sin. BCA : Sin. CAB $=$ AB : BC, so ist $BC = \frac{\text{Sin. CAB} \cdot \text{AB}}{\text{Sin. BCA}}$.

Fünfte Aufgabe.

Wenn in dem schiefwinkligten Dreyeck ABC Fig. 143 alle drey Seiten gegeben sind, und AB $= 40'$, AC $= 30'$, BC $= 20'$, die Winkel CAB, BCA, ABC zu finden. Fig. 143.

Auflösung.

Man ziehet zuforderst mit der Länge der kür-

zesten Seite BC aus C einen Kreis, welcher die andern beyden Seiten AB und AC in G und F schneide. Der Schenkel AC wird in gerader Richtung bis an den Kreis, also bis E verlängert, und auf AB aus dem Centro C die Perpendikulare CD gerichtet, so wird hiedurch GB, welche nach §. 20 = einer Chorde in zween gleiche Theile getheilet, also ist BD = DG.

Und der Triang. ABC ist = Triang. rectang. CDB + Triang. rect. CDA.

Da nun in selbigen

CE = CF = CB = Radio, und
AE = AC + CE, ferner
AF = AC + CF, so ist auch
AE = AC + CB, und
AF = AC − CB.

Da nun laut §. 139 der Geometrie
AB : AE = AF : AG
so setze man vor AE und AF die eben gefundene Ausdrücke, und es wird alsdenn
AB : AC + CB = AC − CB : AG, also

$$AG = \frac{(AC+CB).(AC-CB)}{AB} = \frac{(30+20).(30-20)}{40}$$

$$= \frac{50.10}{40} = \frac{500}{40} = \frac{50}{4} = 12,5$$

oder logarithmisch berechnet, ist AG = l. 50 + l. 10 − l. 40 = 1,6989700 + 1,0000000 − 1,6020600 = 2,6989700 − 1,6020600 = 1,0969100 = l. der Zahl 12,5.

Da

Da AG und AB bekannt, so ist auch GB bekannt, nemlich GB ist = AB — AG = 40 — 12,5 = 27,5, und

$$DB = \frac{GB}{2} = \frac{27,5}{2} = 13.75.$$

Es sind nunmehro in dem Triang. Rect. CDB folgende drey Data bekannt, als
Sinus CDB = Recto = Sin. tot., CB = 20, BD = 13,75, und man kann nunmehro den Sinum CBD auf eine zwiefache Art bestimmen. Man sucht nemlich entweder zuförderst

1) die Länge der Seite CD durch das pythagorische System, und alsdenn würde, weil
CB : CD = Sin. tot. : Sin. CBD, also

$$\text{Sin. CBD} = \frac{\text{CD. Sin. tot.}}{\text{CB}}$$

2) oder man sucht zuförderst den Sinum DCB.

Weil nun CB : BD = Sin. tot. : Sin. BCD, so ist

$$\text{Sin. BCD} = \frac{\text{BD. Sin. tot.}}{\text{CB}}$$

und der Winkel CBD ist alsdenn = 90° — Sin. BCD.

Die Bestimmung des Winkels CBD auf erstere Art wäre also, da $CD = \sqrt{(BCq - BDq)} = \sqrt{(20^2 - 13,75^2)} = \sqrt{(400 - 189,0625)} = \sqrt{210,9375} = 14,52$, folgende, als

$$\text{Sin. CBD} = \frac{\text{DC. Sin. tot.}}{\text{CB}} \text{ oder hier} = \frac{14,52. \text{Rad.}}{20}$$

oder logarithmisch berechnet = l. 14 52 + l. Ein. tot. — l. 20 = 1,1619666 + 10,0000000 — 1,3010300 = 11,1619666 — 1,3010300 = 9,8609366 = l. Ein. 46°, 33′.

Und nach der zwoten Art, da

$$\text{Sin. BCD} = \frac{\text{BD. Sin. tot.}}{\text{BC}} = \frac{13{,}75 \text{. Rad.}}{20}$$, oder

logarithmisch berechnet, Ein. BCD = l. 13,75 + l. Ein. tot. — l. 20 = 1,1383027 + 10,0000000 — 1,3010300 = 11,1383027 — 1,3010300 = 9,8372727 = l. Ein. 43°, 27′,
ist also Sin. CBD = 90° — 43°, 27′ = 46°, 33′.

In dem Triangulo Rectangulo CDA sind, wenn die Bestimmung des Winkels CBD auf erstere Art geschehen, auch 3 Data bekannt, nemlich
Sin. CDA = Recto = Sin. tot.
CD = 14,52 und AC = 30.

Da nun AC : CD = rad. : Sin. CAD, so ist

$$\text{Sin. CAD} = \frac{\text{CD. rad.}}{\text{AC}} = \frac{14{,}52 \text{. rad.}}{30}$$, und logarithmisch = l. 14,52 + l. Sin. tot. — l. 30 = 1,1619666 + 10,0000000 — 1,4771212 = 11,1619666 — 1,4771212 = 9,6848454 = l. Sin. 28°, 57′.

Da nun ferner
CAD + ABC + BCA = 180°, so ist
BCA = 180° — (CAD + ABC) = 180° — (28°, 57′ + 46°, 33′) = 180° — 75°, 30′ = 104°, 30′.

Das vierte Kapitel.

Von der trigonometrischen Berechnung der Polygone.

§. 265. Wir werden hier nur dasjenige berühren, welches der Absicht dieses Auszugs gemäß, und bemerken also:

1) Wenn der Radius eines Cirkels und der Centriwinkel eines regulären Polygons bekannt, so kann dessen Seite durch Rechnung trigonometrisch bestimmt werden.

Wenn also z. E. in dem regulären Polygon Fig. 144 CA = Radio = a, der Winkel am Centro oder ACB = u; die diesem entgegenstehende Seite, oder die Seite des Polygons z. E. AB = b, Fig. 144.

so ist $AB = b = \frac{2a \cdot \text{Sin.} \frac{1}{2}u}{r}$, oder b = dem doppelten Radio, multipliciret mit der Hälfte des Centriwinkels und dieses Product dividiret durch den Sinus totus.

Beweis.

Der Triang. CFA ≅ Triang. CFB nach §. 113 der Geometrie. Es ist also auch, weil AF = FB und ACB = u, sowohl $ACF = \frac{1}{2}u$, als auch $BCF = \frac{1}{2}u$.

Da nun
Sin. CFA : Sin. ACF = AC : AF, oder
Sin. tot. : Sin. $\frac{1}{2}$u = AC : AF, so ist

$$AF = \frac{\text{Sin. } \frac{1}{2}u \cdot AC}{\text{Sin. tot.}} = \frac{a \cdot \text{Sin. } \frac{1}{2}u}{\text{Sin. tot.}}$$

also $$AB = b = \frac{2a \cdot \text{Sin. } \frac{1}{2}u}{\text{Sin. tot.}}.$$

Wäre also z. E. CA = Radio = a = 15'
der Winkel am Centro = ACB = u = 45°,
also $\frac{1}{2}u = \frac{45}{2} = 27°,30'$, so ist

$$AB = b = \frac{2a \cdot \text{Sin. } \frac{1}{2}u}{\text{rad.}},$$ oder logarithmisch berechnet wäre b = l. 2 + l. a + l. Sin. 27°,30' — l. rad. = l. 2 + l. 15 + l. 27°,30' — l. Sin. tot. = 0,30103000 + 1,17609130 + 9,66440560 — 10,00000000 = 11,14152690 — 10,00000000 = 1,14152690 = l. der Zahl 13,85 = der Seite eines regulären Achtecks, weil 45° = dem Centriwinkel eines regulären Achtecks nach §. 114.

2) Wenn die Seite AB = b eines regulären Polygons Fig. 144, nebst dessen Centriwinkel ACB = u bekannt, so lässet sich aus eben gezeigter Formel der Radius desselben = AC = a finden. Denn

Fig. 144.

weil $$b = \frac{2a \cdot \text{Sin. } \frac{1}{2}u}{r}$$, so ist rb = 2a. Sin. $\frac{1}{2}$u,

also $$a = \frac{rb}{2 \text{Sin. } \frac{1}{2}u}.$$

Wenn

Wenn also das Polygon Fig. 144 = einem regulären Achteck, so ist sein halber Centriwinkel $= \frac{u}{2} = \frac{45}{2} = 27°,30'$.

Die Seite AB = b sey = 13,85, so ist $a = \frac{rb}{2 \text{Sin.} \frac{1}{2}u} = \frac{\text{Sin. tot. } 13,85}{2 . \text{Sin. } 27°,30'}$, und logarithmisch berechnet wäre a = l. Sin. tot. + l. 13,85 — (l. 2 + l. 27°,30') = 10,0000000 + 1,1414498 — (0,3010300 + 9,6543560 = 11,1414498 — 9,9654356 = 1,1760142 = l. der Zahl 15.

3) Wenn der Radius, die Seite und der Centriwinkel eines regulären Polygons bekannt, so kann man die Höhe des Polygondreyecks bestimmen.

Es sey z. E. in dem Polygondreyeck ACB Fig. 144. CB = AC = Radio = a = 15. Fig. 144.

Der Centriwinkel ACB = u = 45°, also der halbe Centriwinkel $ACF = BCF = \frac{u}{2} = \frac{45}{2} = 27°,30'$.

Die perpendikulare Höhe CF des Polygondreyecks sey = e, so ist, $CF = e = \frac{a . \text{Col.} \frac{1}{2}u}{\text{rad.}}$.

Es ist also der Radius eines regulären Polygons, mit dem Cosinus des halben Centriwinkels mul-

multipliciret, und dieses Product durch den Sinum totum dividiret, = der perpendikularen Höhe des Polygondreyecks. Nach der angenommenen Maaße würde also hier

CFe = l. 15 + l. cos. 27°,30′ — l. Sin. tot. = l. 15 + l. Sin. 62°,30′ — l. Sin. tot. = 1,1760913 + 9,9479289 — 10,0000000 = 11,1240202 — 10,0000000 = 1,1240202 = l. der Zahl 13,31.

Beweis.

In dem Triang. ACB ist CB = Radio, der Winkel CFB = Recto, folglich CF eine Perpendikulare auf FB.

Da nun $FB = \text{Sin. } BCF = \frac{u}{2}$, so ist

$$FC = \text{Cos. } BCF = \text{Cos. } \frac{u}{2}.$$

Man kann also schließen

Sin. CFB : Sin. CBF = CB : CF, oder

$$\text{Rad.} : \text{cos. } \frac{u}{2} = a : e, \text{ oder}$$

Sin. tot. : cos. 27°,30 = 15 : e, also

$$e = \frac{\text{cos. } 27°,30′ . 15}{\text{Sin. tot.}}.$$

§. 266. Je mehr Seiten ein Polygon hat, desto kleiner wird die Differenz zwischen dem Bogen und der Polygonseite.

Ein

Ein jeder Cirkel kann als ein Polygon von unendlich vielen Seiten betrachtet werden. Ein Cirkel ist in 360° getheilet. Da nun ein Grad = 60 Minuten, so würde ein Cirkel = 360.60 = 21600 Minuten in sich enthalten. Nähmen wir ferner in einem Cirkel eine Chorde eines Bogens von 2 Minuten, so erhielten wir dadurch ein Polygon von 10800 Seiten. Die Länge einer jeden dieser Seiten würde beynahe mit der Größe eines Bogens von 2 Minuten, wenn selbiger in eine gerade Linie verwandelt, übereinkommen. Man kann also die Größe dieser Polygonseite selbst für den Bogen annehmen. Multipliciren wir nun diesen Bogen von 2 Minuten mit der Zahl der Polygonseiten, also hier mit 10800, so würde dieses Product ohngefehr = der ganzen Peripherie eines Cirkels seyn.

Wenn also der Radius, also auch der Diameter eines Cirkels bekannt, so lässet sich das Verhältniß desselben zu seiner Peripherie durch Rechnung bestimmen. Z. E.

der Radius eines Cirkels wäre = a = 10,000000

der Centriwinkel des Polygons = u = 2 Minuten,

also der halbe Centriwinkel = $\frac{u}{2} = \frac{2}{2} = 1$ Minute,

die Polygonseite = b.

Da nun $b = \frac{2a \cdot \text{Sin.} \frac{1}{2}u}{r}$, so ist hier

b =

$b = \frac{2 . 10000000 . \text{Sin. } i}{\text{Sin. tot.}}$, oder logarithmisch berechnet ist $b = l. 2 + l. 10000000 + l. \text{Sin. } i - l. \text{Sin. tot.} = 0{,}30103000 + 7{,}0000000 + 6{,}4637261 - 10{,}0000000 = 13{,}7647561 - 10{,}0000000 = 3{,}7647561 = l.$ der Zahl 5818.

Es ist also diese gefundene Zahl 5818 mit der Zahl der Polygonseiten = 10800 multipliciret, also $5818 . 10800 = 62834400 =$ der Peripherie dieses Cirkels.

Da nun der Radius dieses Cirkels = 10000000, so ist dessen Diameter = 2r = 2 . 10000000 = 20000000, und das Verhältniß dieses Diameters zu der Peripherie, 20000000 : 62834400, oder wenn beyde Glieder durch 20000000 dividiret werden, so ist dieses Verhältniß des Diameters zu der Peripherie, wie 1 : 3,14172.

Dieses eben gefundene Verhältniß des Diameters zu der Peripherie ist dem §. 121 in der Lehre vom Cirkel angeführten Verhältniß, welches = 1 : 3,1415.... bis zu der vierten Decimalstelle gleich. Diese Differenz rühret aber daher, daß Bogen und Chorden für einerley Größe angenommen wurden, welches mathematisch betrachtet nicht wahr ist.

Das fünfte Kapitel.

Einige practische Anwendungen der trigonometrischen Rechnungen.

§. 267. Diese praktische Anwendungen erfordern eine Kenntniß der Meßwerkzeuge, z. E. der Meßkette, Astrolabii u. s. w. Wir berühren selbige aber nicht, sondern zeigen allein etwas von dem Grund des Verfahrens in folgenden Aufgaben.

Erste Aufgabe.

Wie weit ist z. E. Fig. 145. A von B entfernt? Fig. 145.

Bey der Bestimmung dieser Entfernung setzen wir zum voraus, daß man von A nach B weder sehen noch kommen kann, sondern allein dieses aus einem andern angenommenen Standpunct geschehen kann.

Auflösung.

Man ermählet einen Punct, aus welchem sowohl nach A als B zu kommen. Z. E. hier den Punct C.

Man misset aus selbigem mit der Kette die Länge AC und BC mit dem Astrolabio den Winkel ACB, so sind in dem Triang. ACB drey Data bekannt, als

Die Länge AC, BC und der von diesem eingeschlossene Winkel ACB. Man kann also nach der §. 263 berechneten vierten Aufgabe nicht nur den zu der Bestimmung der Länge AB erforderlichen Winkel, sondern auch die Länge der AB selbst finden.

Wäre also z. E. $AC = 30$, $BC = 20$, der Winkel $ACB = 104°,30'$: so ist die Summe beyder Winkel $ABC + CAB = 180 - 104°,30' = 75°,30'$

also die Hälfte ihrer Summe $= \frac{75°,30'}{2} = 37°,45'$.

Es ist aber auch ferner $AC > BC$, folglich der Winkel $ABC >$ als der Winkel ABC, weil ersterer der AC entgegen gesetzet. Da nun

$$AC + BC : AC - BC = \frac{\text{Tang. } ABC + BAC}{2} : \frac{\text{Tang. } ABC - BAC}{2}, \text{ oder hier}$$

$$30 + 20 : 30 - 20 = \frac{\text{Tang. } 75°,30'}{2} : \frac{\text{Tang. } ABC - BAC}{2}, \text{ oder,}$$

$$50 : 10 = \text{Tang. } 37°,45' : \frac{\text{Tang. } ABC - BAC}{2}, \text{ so ist}$$

$$\frac{\text{Tang. } ABC - BAC}{2} = \frac{10 \cdot \text{Tang. } 37°,45'}{50},$$

oder

oder logarithmisch berechnet ist $\frac{\text{Tang. ABC} - \text{BAC}}{2}$
$= 1.10 + 1.\text{Tang. } 37^\circ,45' - 1.50 = 1,0000000$
$+ 9,8888996 - 1,6989700 = 10,8888996 -$
$1,6989700 = 9,1899296 = 1.\text{Tang. } 8^\circ,48'.$

Da nun nach §. 263 der große Winkel = der halben Summe + der halben Differenz, und der kleine Winkel = der halben Summe — der halben Differenz, so ist hier
der große Winkel $ABC = 37^\circ,45' + 8^\circ,48' = 46^\circ,33'$,
der kleine Winkel $BAC = 37^\circ,45' - 8^\circ,48' = 28^\circ,57'$.

Nunmehro lässet sich auch die Länge oder die Entfernung von A nach B leicht bestimmen. Denn weil $\text{Sin. BAC} : \text{Sin. ACB} = \text{BC} : \text{AB}$, so ist $\text{AB} = \frac{\text{BC. Sin. ACB}}{\text{Sin. BAC}}$, und logarithmisch berechnet ist $\text{AB} = 1.\text{BC} + 1.\text{Sin. ACB} - 1.\text{Sin. BAC}$
$= 1.20 + 1.\text{Sin. } 104^\circ,30' - 1.\text{Sin. } 28^\circ,57' = 1.20$
$+ 1.\text{Sin. } 75^\circ,30' - 1.\text{Sin. } 28^\circ,57' = 1,3010300$
$+ 9,9859416 - 9,6848868 = 11,2869716 -$
$9,6848868 = 1,6020848 = 1.\text{der Zahl } 40.$

Zwote Aufgabe.

Wie weit ist die Entfernung von A nach B Fig. 145? Fig. 145.

Wir setzen hier zum voraus, daß man zwar von A nach B sehen, aber nur nach dem einen Endpunct A kommen kann.

Auflösung.

Man erwählet in beliebiger Entfernung von A einen Punct, z. E. C. Je weiter aber dieser erwählte Punct C von A entfernt, desto besser ist solches.

Man misset die Länge der Linie AC. Aus A wird der Winkel BAC und aus C der Winkel ACB gemessen. Die Größe des noch fehlenden Winkels ABC ist alsdenn leicht zu bestimmen. Wenn also z. E. $BAC = 28^\circ, 57'$, $ACB = 104^\circ, 30'$, so ist $ABC = 180^\circ - (28^\circ, 57' + 104^\circ, 30') = 180^\circ - 133^\circ, 27' = 46^\circ, 33'$.

Wäre nun die gemessene Länge $AC = 30$, so kann man nunmehro die Länge AB auch bestimmen. Denn da

Sin. ABC : Sin. ACB = AC : AB, so ist

$$AB = \frac{AC \cdot \text{Sin. } ACB}{\text{Sin. } ABC},$$

und logarithmisch berechnet wäre

AB = l. AC. + l. Sin. ACB − l. Sin. ABC = l. 30 + l. 104°, 30′ − l. Sin. 46°, 33′ = l. 30 + l. 75°, 30′ − l. 46°, 33′ = 1,4771212 + 9,9859416 − 9,8609215 = 11,4630628 − 9,8609215 = 1,6021413 = l. der Zahl 40.

Dritte Aufgabe.

Wie weit ist Fig. 146 A von B entfernet?

Es wird zum voraus gesetzet, daß man weder zu A noch B kommen könne.

Auflösung.

Man erwählet in willkührlicher Entfernung von AB eine Standlinie ED von beliebiger Länge.

Aus einem in selbiger angenommenen Punct, z. E. C, messe man den Winkel ACE und BCD, ferner aus E den Winkel AEC, und aus D den Winkel BDC. Endlich messe man die Länge EC und CDI.

Hiedurch sind in dem Dreyeck AEC drey Data bekannt, als der Winkel AEC und ECA, ferner die Länge der Linie EC.

In dem Dreyeck BCD sind auch drey Data bekannt, als der Winkel BCD und BDC, ferner die Länge der Linie CD. Man kann also nunmehro sowohl AC als CB finden.

Wäre also ED = 50, EC = 24, CD = 26.
Ferner der Winkel AEC = 98°,
der Winkel ACE = 29°,38′,
der Winkel BCD = 45°,52′,
der Winkel BDC = 49°,47′,
so ist der Winkel EAC = 180° — 98° + 29°38′ = 180° — 127°,38′ = 52°,22′; und der Winkel CBD = 180° — 45°,52′ + 49°,47′ = 180° — 95°,33′ = 84°,27′. Da nun
Sin. EAC : Sin. AEC = EC : AC, so ist

$$AC = \frac{EC \cdot \text{Sin. AEC}}{\text{Sin. EAC}} = \frac{24 \cdot \text{Sin. } 98^\circ}{\text{Sin. } 52^\circ,22'},$$ und loga-

richtm sch berechnet ist AC = l. 24 + l. Sin. 98° — l. Sin. 52°,22′ = l. 24 + l. Sin. 82° — l. Sin. 52°,22′ = 1,3802112 + 9,9957528 — 9,8986893 = 11,3759640 — 9,8986893 = 1,4772747 = l. der Zahl 30.

Ferner, da

Sin. CBD : Sin. BDC = CD : CB, so ist

$$CB = \frac{CD \cdot \text{Sin. BDC}}{\text{Sin. CBD}},$$

und logarithmisch berechnet, ist CB = l. CD + l. Sin. BDC — l. Sin. CBD = l. 26 + l. Sin. 49°,47′ — l. Sin. 84°.27′ = 1,4149733 + 9,8828706 — 9,9979593 = 11,2978439 — 9,9979593 = 1,2998846 = l. der Zahl 20.

In dem Triangulo ACB sind nun auch drey Data bekannt, nemlich AC = 30, BC = 20, und der

Winkel ACB, welcher = 180° — (ACE + BCD) = 180° — (29°,38′ + 45°,52′) = 180° — 75°,30′ = 104°,30′.

Da nun hier

$$AC + BC : AC - BC = \frac{\text{Tang. ABC} + \text{BAC}}{2} : \frac{\text{Tang. ABC} - \text{BAC}}{2}, \text{ oder}$$

30

$30 + 20 : 30 - 20 = \frac{\text{Tang. } 75^\circ,30'}{2} : \frac{\text{Tang. ABC} - \text{BAC}}{2}$, oder

$50 : 10 = \text{Tang. } 37^\circ,45' : \frac{\text{Tang. ABC} - \text{BAC}}{2}$, so ist

$$\frac{\text{Tang. ABC} - \text{BAC}}{2} = \frac{10 . \text{Tang. } 37^\circ.45'}{50}$$

oder logarithmisch berechnet, ist $\frac{\text{Tang. ABC} - \text{BAC}}{2}$

$= \text{l. } 10 + \text{l. Tang. } 37^\circ,45' - \text{l. } 50 = \text{l. Tang. } 37^\circ,45' - \text{l. } 5 = 9,8888996 - 0,6989700 = 9,1899296 = \text{l. Tang. } 8^\circ,48'.$

Es ist aber der Winkel ABC größer, als der Winkel BAC, weil ersterer der AC, die größer als BC, entgegen gesetzet, folglich ist
$ABC = 37^\circ,45' + 8^\circ,48' = 46^\circ,33'$, und
$BAC = 37^\circ,45 - 8^\circ,48' = 28^\circ,57'$.

Die Entfernung von AB lässet sich nun auch bestimmen. Denn da

Sin. ABC : Sin. ACB = AC : AB, oder hier
Sin. $46^\circ,33' :$ Sin. $104^\circ,30' = 30 : AB$,

so ist $AB = \frac{30 . \text{Sin. } 104^\circ,30'}{\text{Sin. } 46^\circ,33'}$

und logarithmisch berechnet, wäre AB = l. 30 + l. Sin. 104°, 30′ — l. Sin. 46°, 33′ = l. 30 + l. Sin. 75°, 30′ — l. Sin. 46°, 33′ = 1,47712 12 + 9,9859416 — 9,8609215 = 11,4630628 — 9,8609215 = 1,6021413 = l. der Zahl 40.

Oder auch, da

Sin. BAC : Sin. ACB = BC : AB, also hier Sin. 28°, 57′ : Sin. 104°, 30′ = 20 : AB, so ist

$$AB = \frac{20 . \text{Sin. } 104^\circ, 30'}{\text{Sin. } 28^\circ, 57'}$$

und logarithmisch berechnet, wäre hier AB = l. 20 + l. 75°, 30′ — l. Sin. 28°, 57′ = 1,3010300 + 9,9859416 — 9,6848868 = 11,2869716 — 9,6848868 = 1,6020848 = l. der Zahl 40.

§. 268. Die trigonometrischen Berechnungen werden auch vorzüglich zu Messung der Höhen, oder der perpendikularen Entfernung des Endpuncts der Höhe einer Sache von seiner Grundfläche, worauf es stehet, angewendet. Auch hievon wollen wir folgende Beispiele geben.

Erste Aufgabe.

Fig. 147. Wie hoch ist der Thurm, Fig. 147 BC.

Wir setzen zum voraus, daß man zu dem Fuß B dieses Thurms kommen kann.

Auflösung.

Man erwählet eine willkührliche Entfernung von B, z. E. A, aus welcher aber die Spitze C sichtbar. Die Länge AB sowohl als der Winkel CDE wird gemessen.

Da nun CE = Perpend., also der Winkel CED = Recto, so ist

Triang. CED = Triang. rectang., in welchem drey Data bekannt, nemlich der Winkel CDE, welcher gemessen, der Winkel CED, welcher nach der Voraussetzung = Recto, die Linie AB = nur ff, welche auch gemessen. Betrachtet man hier DE als Radium, so ist CE = Tang. des Winkels CDE. Da nun

Sin. CED : Tang. CDE = DE : CE, oder

Sin. tot. : Tang. CDE = DE : CE, so ist

$$CE = \frac{DE \text{. Tang. } CDE}{\text{Sin. tot.}}$$

, oder logarithmisch berechnet, ist CE = l. DE + l. Tang. CDE − l. Sin. tot.

Wenn nun AB = DE = 70, der Winkel CDE = 5°, so wäre CE = l. DE + l. Tang. CDE − l. Sin. tot. = l. 70°, + l. Tang. 5° − l. Sin. tot.
= 1,8450980 + 10,0761865 − 10,0000000
= 11,9212845 − 10,0000000 = 1,9212845
= l. der Zahl 83,42.

Wenn nun das zum Winkelmessen gebrauchte Instrument 5 Fuß hoch gewesen, so ist EB = 5 Fuß, und wenn 83,42 = 83 Fuß, 4 Zoll 2 Linien. Die ganze Höhe BC = 5 + 83,42 = 88,42 Fuß = 88 Fuß 4 Zoll 2 Linien.

Zwote Aufgabe

Fig. 148. Wie hoch ist der Thurm BC Fig. 148, zu dessen Fuß man nicht kommen kann.

Auflösung.

Da man zu dem Fuß B nicht kommen kann, so erwählet man wirklich eine Länge, z. E. AD, und misset selbige. Ferner wird aus D der Winkel ADC, und aus A der Winkel CAD gemessen, wenn diese bekannt, so lässet sich sowohl der Winkel ACD, als auch der Winkel CDE bestimmen, und ist alsdenn

der Winkel ACD = 180° — (ADC + CAD)
der Winkel CDE = 180° — ADC.

Man kann nunmehro sowohl die Länge CD als Höhe CE finden. Denn da
Sin. ACD : Sin. CAD = AD : CD, so ist

$$CD = \frac{AD \cdot \text{Sin. CAD}}{\text{Sin. ACD}},$$

oder logarithmisch berechnet, ist CD = l. AD + l. Sin. CAD — l. Sin. ACD.

Da ferner der Winkel CED = Recto, und

Sin.

Sin. CED : Sin. CDE = CD : CE, oder
Sin. tot. : Sin. CDE = CD : CE, so ist
$CE = \frac{CD \cdot \text{Sin. CDE}}{\text{Sin. tot.}}$, und logarithmisch berechnet, ist CE = l. CD + l. Sin. CDE — l. Sin. tot.

Addiret man demnächst die Höhe des zum Winkelmessen gebrauchten Instruments, welche hier = EB zu der gefundenen CE, so ist
EB + CE = BC = der Höhe des Thurms.

Wenn also AD = 40′, die Höhe des Instruments = EB = 5′, der Winkel CAD = 37°,10°, der Winkel ADC = 130°, so ist der Winkel ACD = 180° — (37°,10′ + 130°) = 180° — 167°,10′ = 12°,50′ und der Winkel CDE = 180° — 130° = 50°.
Folglich CD = l. AD + l. Sin. CAD — l. Sin. ACD = l. 40 + l. Sin. 37°,10′ — l. Sin. 12°,50′
= 1,6020600 + 9,7811344 — 9,3465794
= 11,3831944 — 9,3465794 = 2,0366150
= l. der Zahl 108,8.
Und CE = l. CD + l. Sin. CDE — l. Sin. tot. = l. 108,8 + l. Sin. 50° — l. Sin. tot.
= 2,0366289 + 9,8842540 — 10,0000000
= 11,9208829 — 10,0000000 = 1,9208829
= l. der Zahl 83,34.
folglich CB = BE + CE = 5′ + 83′,34 = 88′,34
= der Höhe des Thurms.

§. 269. Wir beschließen hiemit den Auszug des größern Lehrbuchs. Er ist zwar kurz abgefasset; er enthält aber dennoch die Erlernung derjenigen Wahrheiten in sich, welche der Beurtheilung Anfängern in dieser Wissenschaft angemessen, und selbige zubereiten kann, das größere Werk mit dem zu erwartenden Nutzen zu lesen.

Ende.

Folgende Bücher sind im Verlage der Meyer. schen Buchhandlung in der Michaelmesse 1781 herausgekommen.

Bibliothek, auserlesene, der neuesten deutschen Litteratur, 20ter und lezter Band, gros 8.

Bostells, Fr. Jac. Dietr. von, Beyträge zur Kammergerichtlichen Litteratur und Praxi, 2ten Theils 1tes Stük. 8.

Dohm, Chr. Wilh. Materialien für die Statistik und neuere Staatengeschichte, Anhang zur 3ten Lieferung, gros 8.

Häselers, J. F. Auszug aus seinen Anfangsgründen der Arithmetik, Algebra, Geometrie und Trigonometrie, zum eignen Unterricht, mit Kupf. 8.

Herodoti

Herodoti Halicarnaſſenſis & Cteſiae Cnidii quae extant Opera & Fragmenta graece ex recenſione Petr. Weſſelingii curavit Aug. Chr. Borhek Vol. II. 8 maj.

Religionsgeſchichte, neueſte, unter der Aufſicht Hrn. Chr. Wilh. Fr. Walch, 8ter Theil, gros 8.

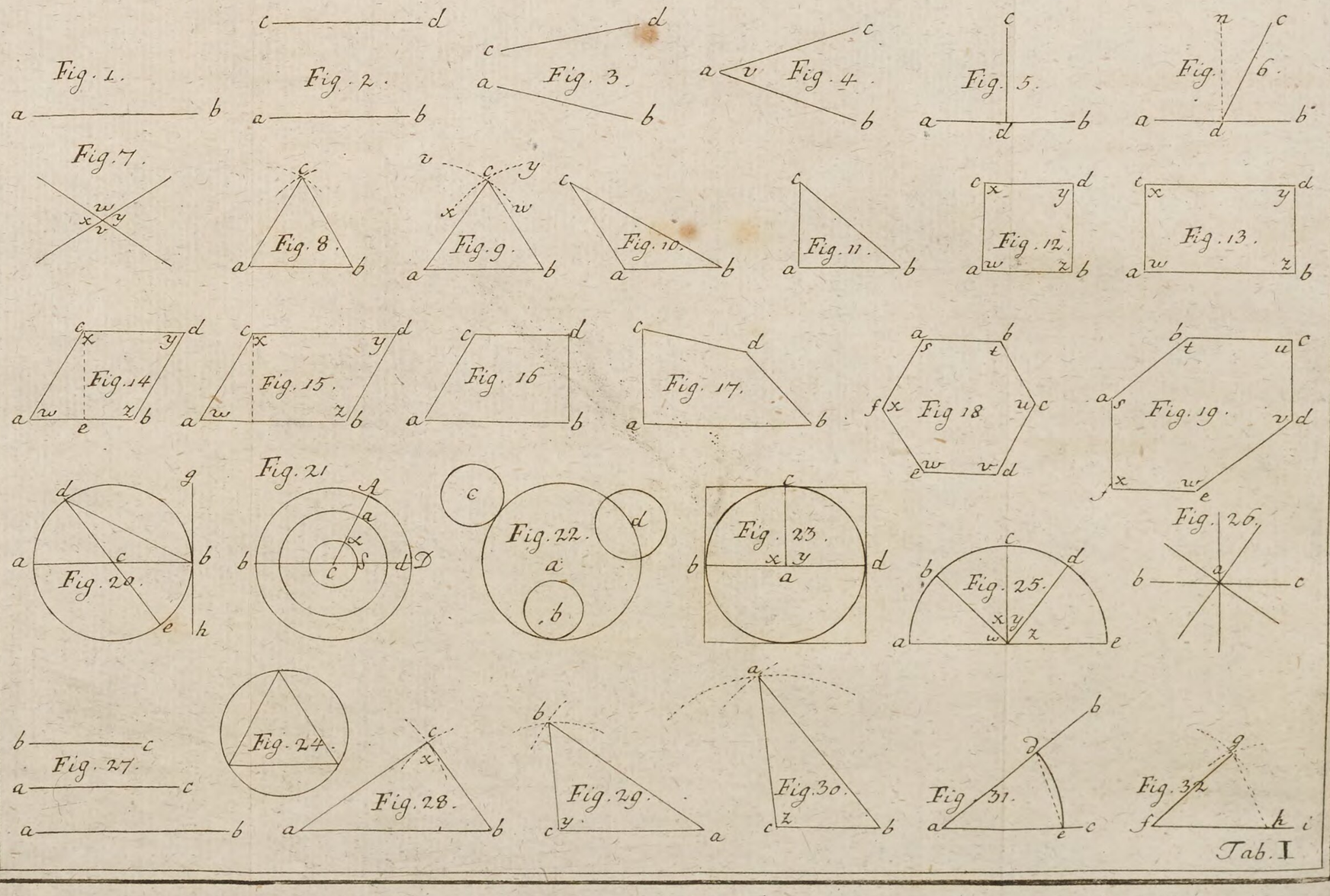


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 16
Fig. 17.
Fig 18
Fig. 19.
Fig. 20.
Fig. 21
Fig. 22.
Fig. 23.
Fig. 25.
Fig. 26.
Fig. 27.
Fig. 24.
Fig. 28.
Fig. 29.
Fig. 30.
Fig 31.
Fig. 32.
Tab. I

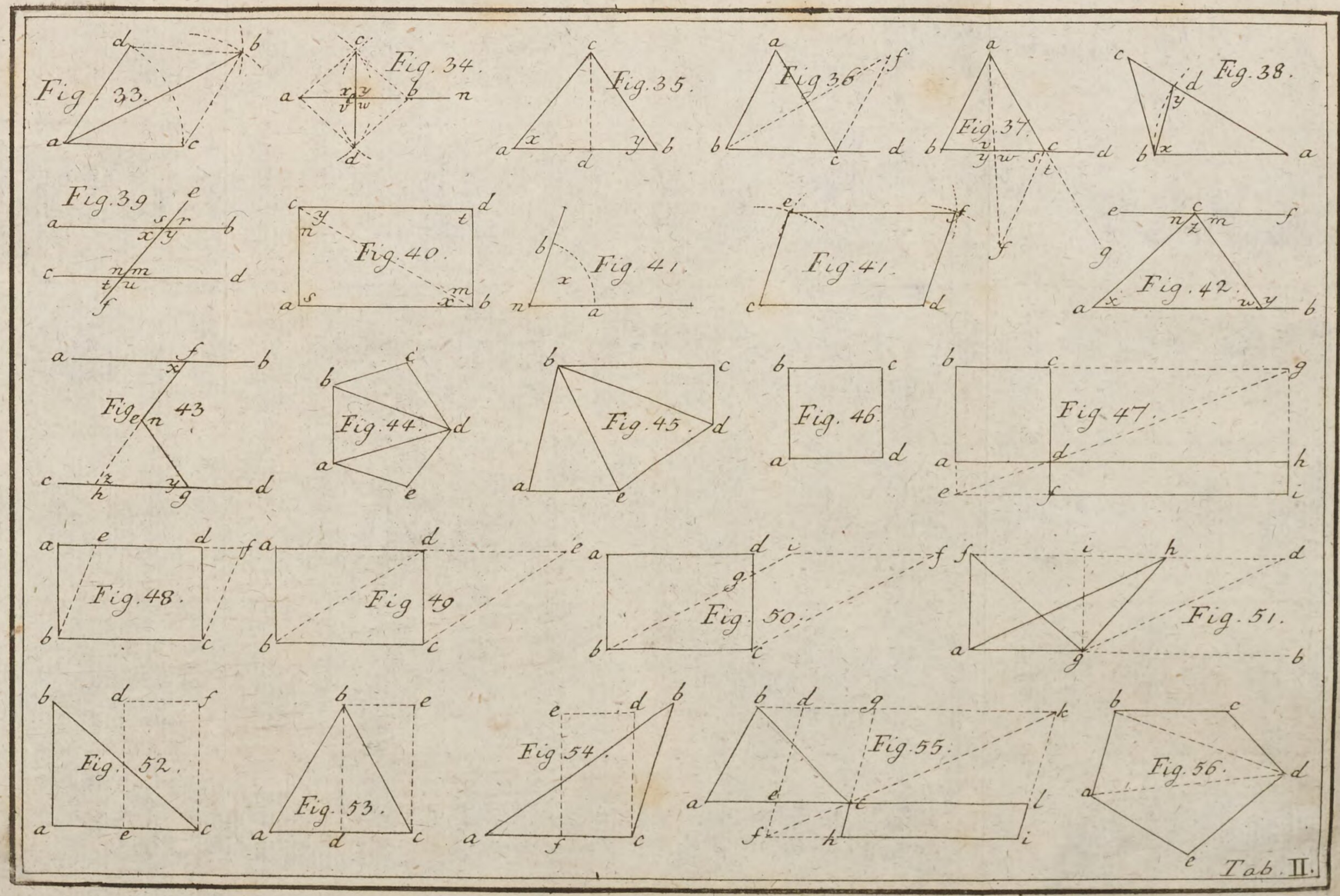


Fig. 33.
Fig. 34.
Fig. 35.
Fig. 36.
Fig. 37.
Fig. 38.
Fig. 39.
Fig. 40.
Fig. 41.
Fig. 41.
Fig. 42.
Fig. 43.
Fig. 44.
Fig. 45.
Fig. 46.
Fig. 47.
Fig. 48.
Fig. 49
Fig. 50.
Fig. 51.
Fig. 52.
Fig. 53.
Fig. 54.
Fig. 55.
Fig. 56.
Tab. II.

Fig. 57.

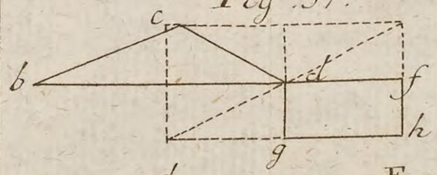


Fig. 58.

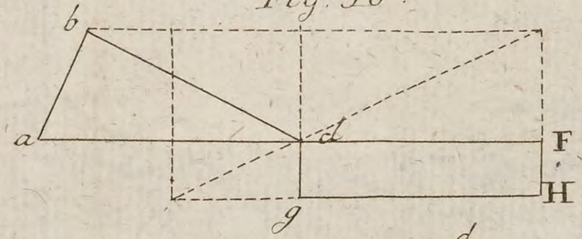
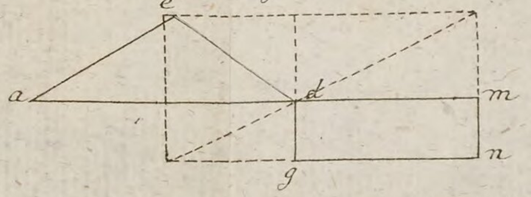


Fig. 59



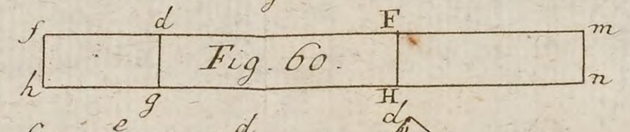


Fig. 60.

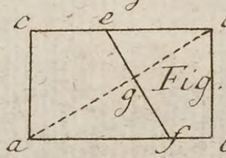


Fig. 61.

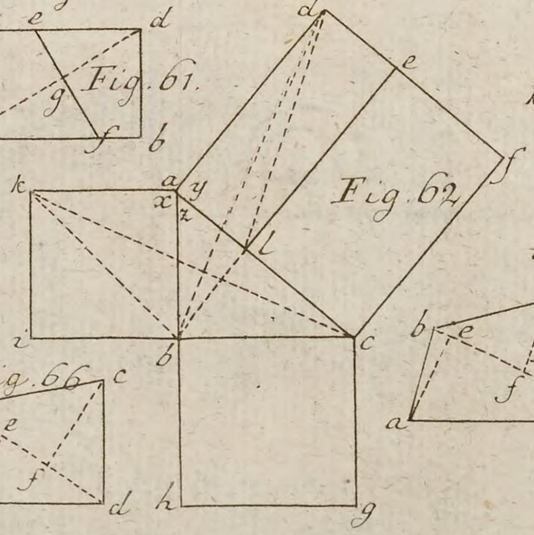


Fig. 62.

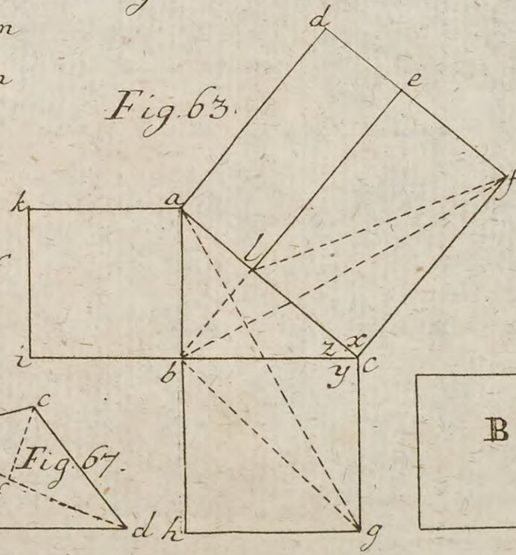


Fig. 63.

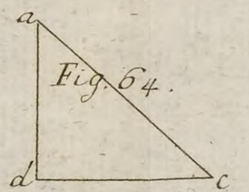
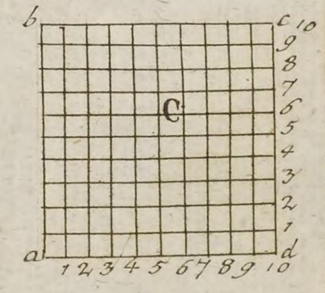
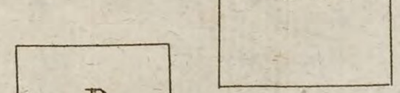
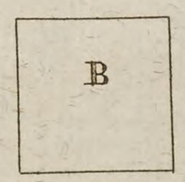


Fig. 64.







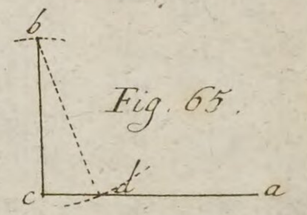


Fig. 65.

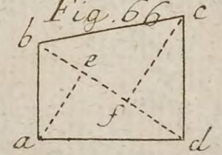


Fig. 66.

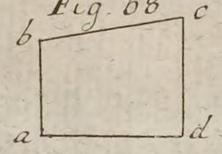


Fig. 68.

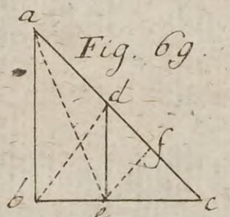


Fig. 69.

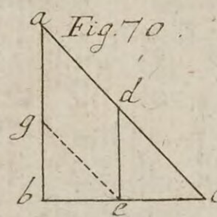


Fig. 70.

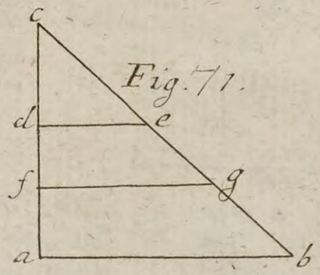


Fig. 71.

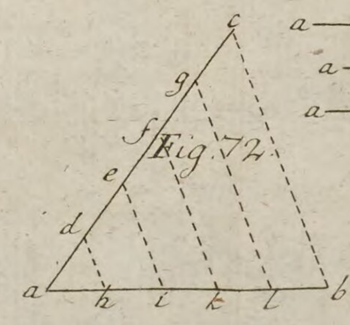


Fig. 72.

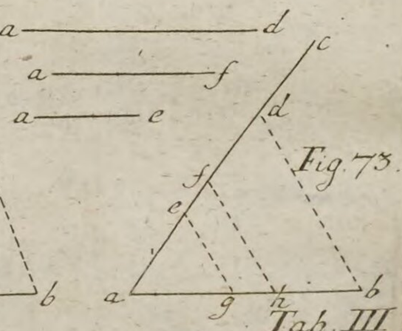
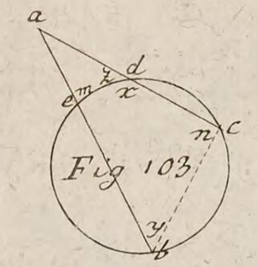
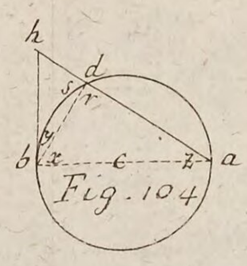
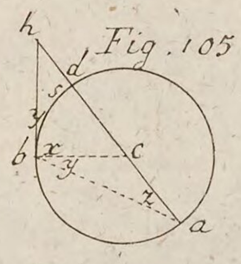


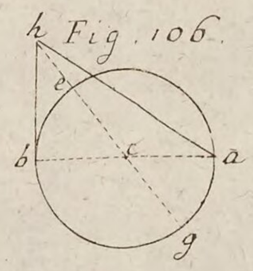
Fig. 73.

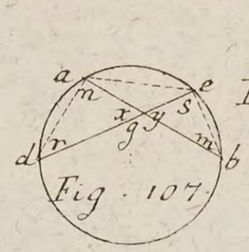
Tab. III.

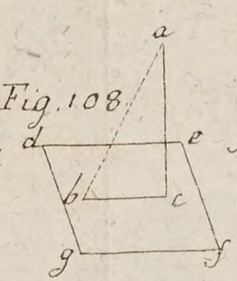

a
d
x
m
n
c
Fig. 103
y
b


h
d
s
r
b
x
c
z
a
Fig. 104


h
Fig. 105
d
s
y
b
x
c
y
z
a


h
Fig. 106.
e
b
c
a
g


a
e
m
s
x
y
g
d
r
m
b
Fig. 107.


a
Fig. 108
d
e
b
c
g
f

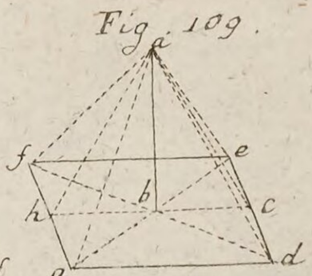
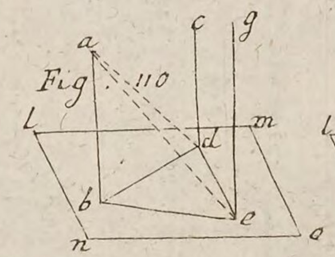
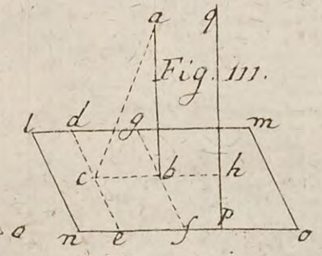
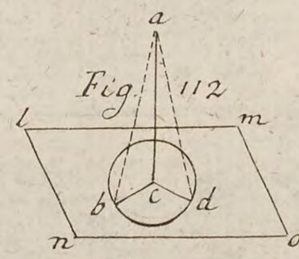
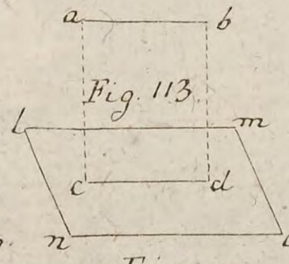


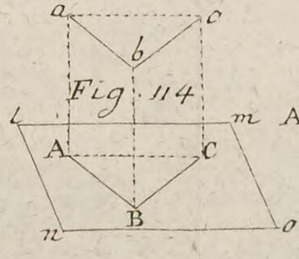
Fig. 109.
a
f
e
b
h
c
g
d

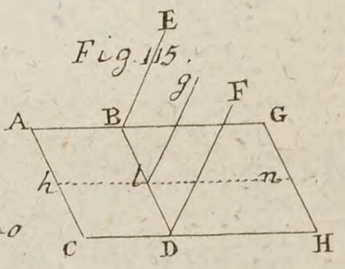

c
g
a
Fig. 110
l
m
d
b
e
n
o

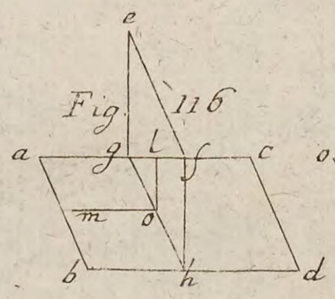

a
g
Fig. 111.
l
d
g
m
c
b
h
n
e
f
p
o


a
Fig. 112
l
m
b
c
d
n
o


a
b
Fig. 113
l
m
c
d
n
o


a
c
b
Fig. 114
l
m
A
C
n
B
o


E
Fig. 115.
g
F
A
B
G
h
l
n
C
D
H


e
Fig. 116
a
g
l
f
c
m
o
b
h
d

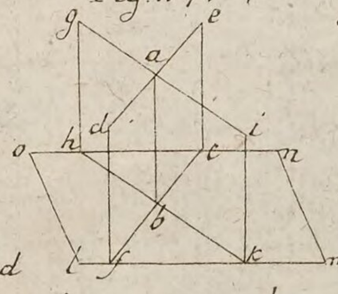
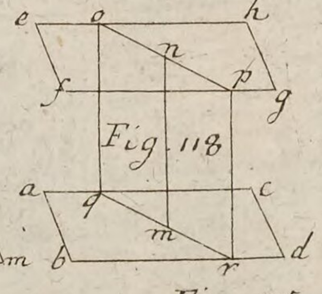


Fig. 117.
g
e
a
d
i
h
c
o
n
b
l
f
k
m


e
o
h
n
p
f
g
Fig. 118
a
q
c
m
b
r
d

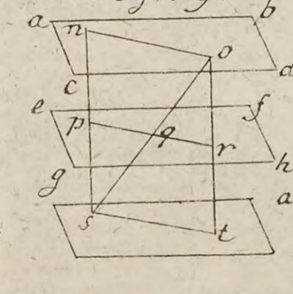
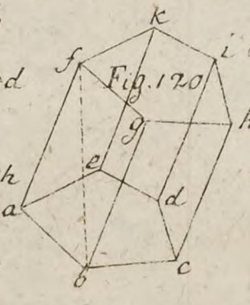
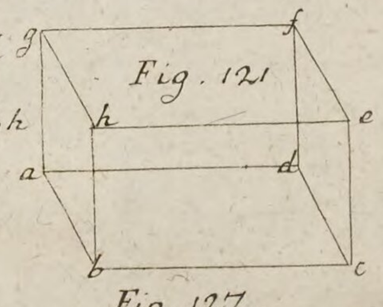


Fig. 119.
a
b
n
o
d
c
e
p
f
q
r
g
h
s
t


k
i
f
Fig. 120
g
h
e
d
a
b
c


g
f
Fig. 121
h
e
a
d
b
c

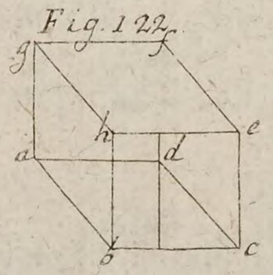
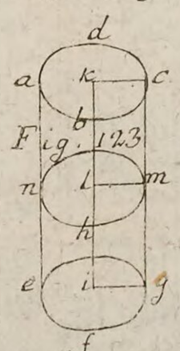
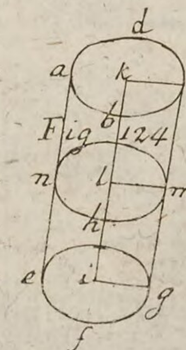


Fig. 122.
g
f
h
e
a
d
b
c


d
a
k
c
b
Fig. 123
n
l
m
h
e
i
g
f


d
a
k
c
b
Fig. 124
n
l
m
h
e
i
g
f

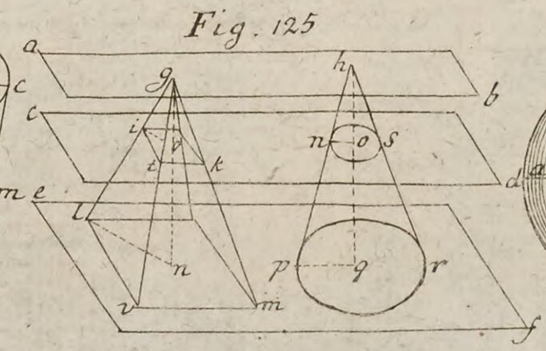


Fig. 125
a
g
h
b
c
i
k
n
o
s
d
e
l
n
p
q
r
v
m
f

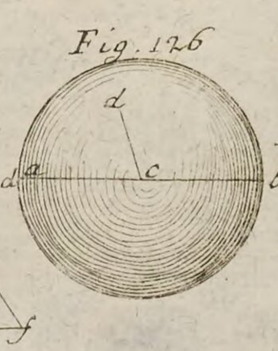


Fig. 126
d
a
c
b

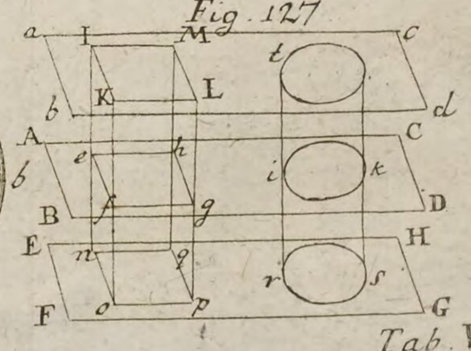
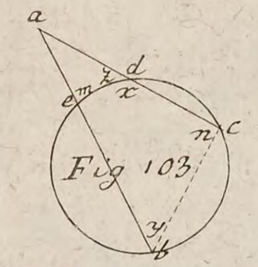
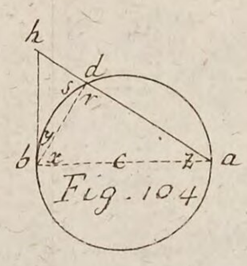
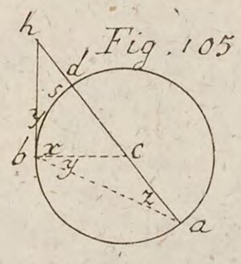


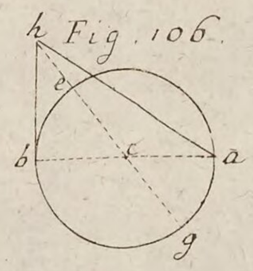
Fig. 127
a
I
M
c
t
b
K
L
d
A
C
e
h
i
k
B
f
g
D
E
H
n
q
r
s
F
o
p
G

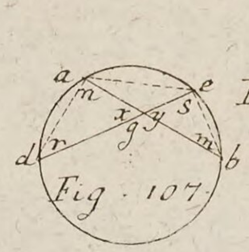
Tab. V

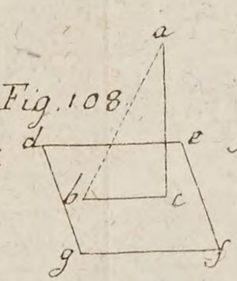

a
d
x
m
n
c
Fig. 103
y
b


h
d
s
r
b
x
c
z
a
Fig. 104


h
Fig. 105
d
s
y
b
x
c
y
z
a


h
Fig. 106.
e
b
c
a
g


a
e
m
s
x
y
g
d
r
m
b
Fig. 107.


a
Fig. 108
d
e
b
c
g
f

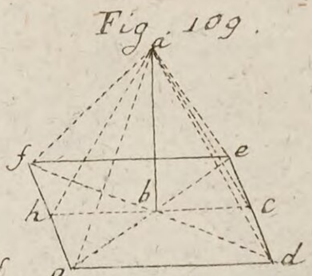
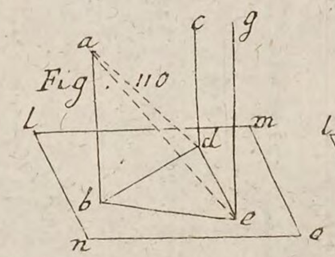
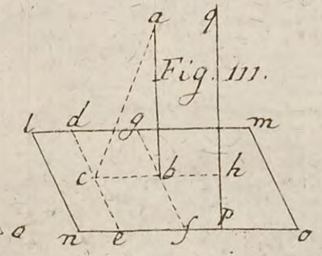
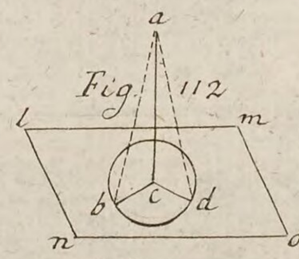
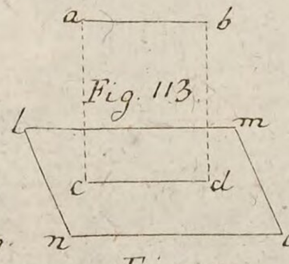


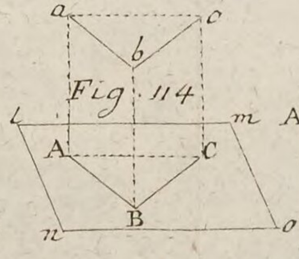
Fig. 109.
a
f
e
b
h
c
g
d

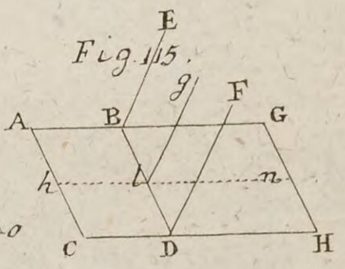

c
g
a
Fig. 110
l
m
d
b
e
n
o

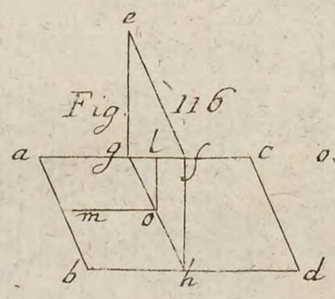

a
g
Fig. 111.
l
d
g
m
c
b
h
n
e
f
p
o


a
Fig. 112
l
m
b
c
d
n
o


a
b
Fig. 113
l
m
c
d
n
o


a
c
b
Fig. 114
l
m
A
C
n
B
o


E
Fig. 115.
g
F
A
B
G
h
l
n
C
D
H


e
Fig. 116
a
g
l
f
c
m
o
b
h
d

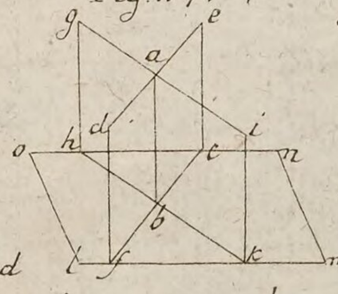
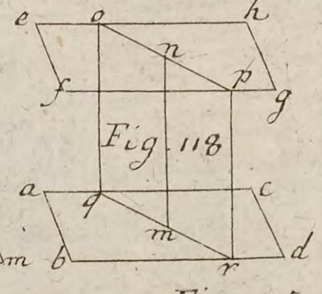


Fig. 117.
g
e
a
d
i
h
c
o
n
b
l
f
k
m


e
o
h
n
p
f
g
Fig. 118
a
q
c
m
b
r
d

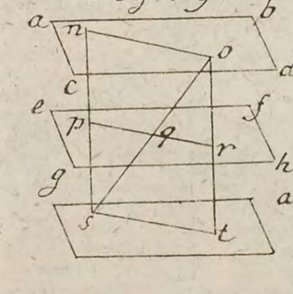
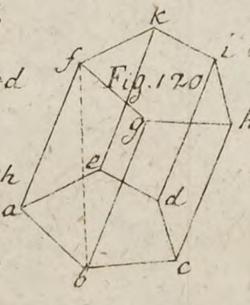
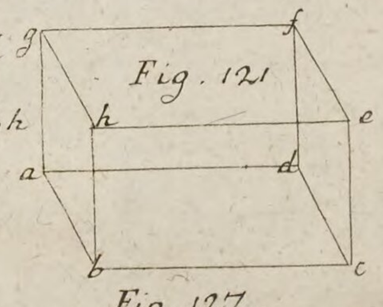


Fig. 119.
a
b
n
o
d
c
e
p
f
q
r
g
h
s
t


k
i
f
Fig. 120
g
h
e
d
a
b
c


g
f
Fig. 121
h
e
a
d
b
c

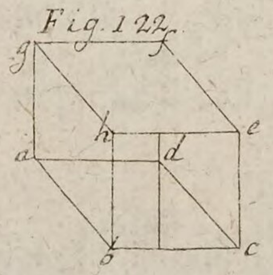
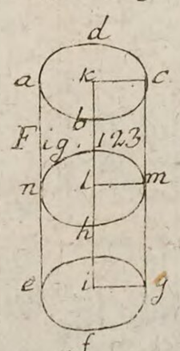
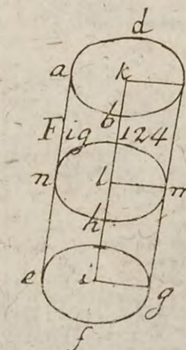


Fig. 122.
g
f
h
e
a
d
b
c


d
a
k
c
b
Fig. 123
n
l
m
h
e
i
g
f


d
a
k
c
b
Fig. 124
n
l
m
h
e
i
g
f

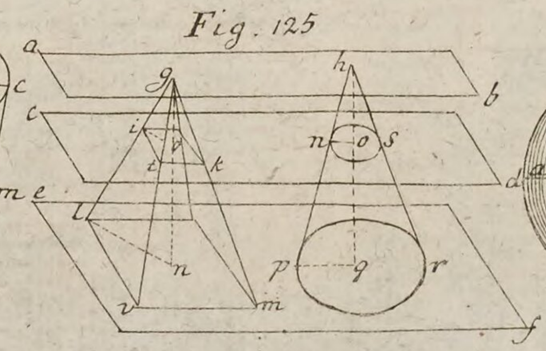


Fig. 125
a
g
h
b
c
i
k
n
o
s
d
e
l
n
p
q
r
v
m
f

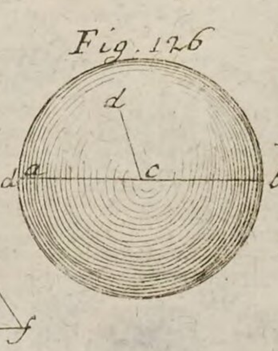


Fig. 126
d
a
c
b

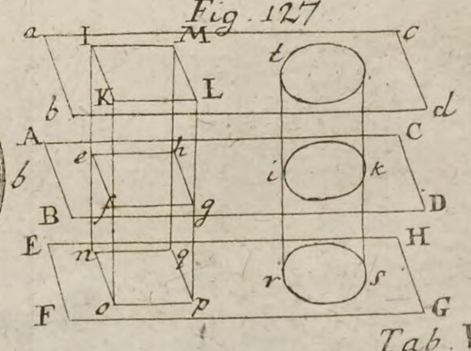


Fig. 127
a
I
M
c
t
b
K
L
d
A
C
e
h
i
k
B
f
g
D
E
H
n
q
r
s
F
o
p
G

Tab. V

Fig. 128.

Fig. 129.

Fig. 130.

Fig. 131.

Fig. 131 b.

Fig. 132.

Fig. 133.

Fig. 134.

Fig. 135.

Fig. 136.

Fig. 137.

Fig. 138.

Fig. 139.

Fig. 140.

Fig. 142

Fig. 143

Fig. 144.

Fig. 147.

Fig. 145.

Fig. 141.

Fig. 146.

Fig. 148.

Tab. VI.

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Häseler, Johann F.

Auszug aus des Abts J. F. Häseler Anfangsgründen der Arithmetik, Algebra, Geometrie & Trigonometrie zum eignen Unterricht

Lemgo 1781

Augsburg, Staats- und Stadtbibliothek -- H 957
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11251709-2
VD18 11309652-003